UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

FACULTÉ DES SCIENCES - TÉTOUAN

Licence Fondamentale Sciences de la Matière Physique

Semestre 3 - M20 : Analyse Numérique et Algorithmique

ANNALES DES EXAMENS

Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**

Département de Mathématiques

2022-2023

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié "Annales des examens", destiné aux étudiant du semestre trois de la Licence Fondamentale Sciences de la Matière Physique, est conforme au nouveau programme appliqué depuis 2014.

Ce polycopié présente les sujets d'examens proposées durant les années universitaires de 2014-2015 à 2022-2023 ainsi que des indications et des solutions détaillées.

Ce polycopié se limite au contenu enseigné à la Faculté des Sciences de Tétouan, le lecteur intéressé par plus d'approfondissements peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus complète.

BOUCHAIB FERRAHI

Chapitre 1

ANNALES DES EXAMENS - SUJETS

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année: 2014-2015
Janvier - 2015

Controle d'Analyse Numérique & Algorithmique (SMP-S3)

Exercice-1: (3 points)

Ecrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en binaire puis effectuer l'opération en binaire $(90)_{10} \times (97)_{10}$.

Exercice-2: (7 points)

Soit l'équation

$$x(1+e^x) = e^x \quad (E)$$

1. Montrer que cette équation admet une racine unique s dans $[0,1]$
2. Proposer une itération de point fixe pour l'équation (E).
3. Montrer, que cette itération converge vers la solution s.
4. Ecrire la méthode de Newton pour cette équation en précisant un bon choix de l'initialisation x_0.

Exercice-3: (5 points)

Cherche l'approche de l'intégrale

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

par la Méthode de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$.

Exercice-4: (5 points)

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses x_i :

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

Ensuite discuter l'erreur d'interpolation .

(on admetant que $M_5 = \max_{t\in[\min x_i, \max x_i]} f^{(5)}(t) = 100$).

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année: 2014-2015
Mars-2015

Rattrapage
d'Analyse Numérique & Algorithmique
SMP-S3

Problème 1:

Soit $a \in IR_+^*$ et $c = \sqrt{a}$, on veux déterminer c à l'aide de la méthode de Newton on l'appliquant à la fonction $f(x) = x^2 - a$.

1) Déterminer l'algorithme de la méthode de Newton pour f.
2) Si $0 \prec x_0 \prec c$ montrer que $x_1 \succ c$.
3) Si $x_0^2 \succ a$ montrer que $x_n^2 \succ a$, $\forall n$.
4) Montrer que x_n est une suite décroissante, en déduire que x_n converge.
5) Montrer que effectivement que la limite de x_n est égale à $c = \sqrt{a}$.
6) Montrer qu'on ne peut pas appliquer la méthode du point fixe pour $g(x) = f(x) + x$ sur IR_+^*.

Problème 2:

On considère le problème du calcul de $l \in [0, \pi]$ tel que $l = 1 - \frac{1}{4}cos(l)$.

1. Montrer qu'on peut utiliser la méthode de la *dichotomie* .

Que vaut l'approximation de l après 3 itérations ?

Quel est l'erreur maximale qu'on obtient après 3 itérations ?

k	0	1	2	3
$[a_k, b_k]$	$[0, \pi]$			
l_k	$\frac{\pi}{2}$			

2. On considère la méthode de point fixe suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \pi], \\ x_{k+1} = g(x_k) \ \forall k \geq 0, \end{cases}$$

avec $g : [0, \pi] \longrightarrow IR$ la fonction définie par $g(x) = 1 - \frac{1}{4}cos(x)$.

2.1. Étudier graphiquement la convergence de cette méthode.

2.2. Montrer rigoureusement que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0, \pi]$.

2.3. Montrer que l'erreur satisfait l'inégalité $|x_k - l| \leq C^k |x_0 - l|$.

Donner une estimation de la constante C et l'utiliser pour minorer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher l à 10^{-3} près.

SMP3 - M20 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE
CONTRÔLE CONTINU JANVIER2016 DURÉE : 1H30

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

Soient $X = 101$ et $Y = 61$.

1. Donner les écritures binaires de X et de Y ;

2. Effectuer les **opérations binaires** suivantes : $X + Y$ et $X \times Y$.

EXERCICE 2 (8 POINTS) :

Utiliser des valeurs approchées à trois chiffres après la virgule.

On considère l'équation (E) donnée par :

$$(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$$

1. Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser ;

2. Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;

3. Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;

4. On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

   a. Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;

b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]}|\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$) ;

c. Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;

EXERCICE 3 (7 POINTS) :

Soit f une fonction donnée par le tableau de valeurs suivant :

x_i	-1	0	1	2	4
$f(x_i)$	3	1	3	15	93

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de f basé sur les trois points -1, 0 et 1 ;

2. Donner une valeur approchée de $f(-\frac{1}{2})$. Peut-on utiliser la question 1. pour calculer une valeur approchée de $f(\frac{3}{2})$?

3. Peut-on améliorer la précision du polynôme d'interpolation de f ? Si oui, décrire la méthode (sans faire les calculs) ;

4. En supposant que f est continue sur $[-1, 4]$, utiliser la méthode de Newton-cotes ($n = 2$) pour calculer une valeur approchée de :
$$I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

5. En utilisant la même méthode, déduire une valeur approchée de :
$$I_2 = \int_{0}^{4} f(x)dx$$

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année: 2015-2016
Octobre - 2016

Rattrapage d'Analyse Numérique SMP3

Barréme: 3p+5p+7p+5p

Exercice 1:

Calculer $\int_1^2 \sqrt{x}dx$ par la formule des rectangles en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties.

Exercice 2:

Écrire $(34)_{10}$ et $(27)_{10}$ en binaire puis effectuer l'opération en binaire $(34)_{10}+(27)_{10}$ et vérifier que le résultat obtenu soit le bon.

Exercice 3:

Soit $a \in IR_+^*$ et $c = \sqrt{a}$, on veux déterminer c à l'aide de la méthode de Newton on l'appliquant à la fonction $f(x) = x^2 - a$.

1) Déterminer l'algorithme de la méthode de Newton pour f.
2) Si $0 \prec x_0 \prec c$ montrer que $x_1 \succ c$.
3) Si $x_0^2 \succ a$ montrer que $x_n^2 \succ a$, $\forall n$.
4) Montrer que x_n est une suite décroissante, en déduire que x_n convérge.
5) Montrer que effectivement la limite de x_n est égale à $c = \sqrt{a}$.

Exercice 4:

Soit l'équation différentielle $y\prime(t) = y(t) + t$ à condition initiale $y(0) = 1$. Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales.

Comparer à la solution exacte.

N.B. Les téléphones portables et les calculatrices programmables ou non programmables ne sont pas autorisés, la communication orale, la passation de documents entre étudiants, la possession de documents non autorisés à portée de mains, l'utilisation des documents non autorisés, sont strictement interdits.

Bon_courage (*Dr. Aziz Arbai & Dr. Bouchaib Ferrahi*)

■

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — jeudi 16 février 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (7 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$$

On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$;
2. Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
3. On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
   x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;
4. On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$;
5. Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Exercice 2 (7 POINTS) : L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 3$) pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$; (dite aussi méthode de Simpson $\frac{3}{8}$).

1. Expliquer pourquoi, sur l'intervalle $[-1, 1]$, il faut choisir les points -1, $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 ;
2. Recopier et compléter le tableau suivant (en explicitant les calculs) :

i	0	1	2	3
x_i	-1	??	??	1
$L_i(x)$	$\frac{-1}{16}(9x^2 - 1)(x - 1)$	??	$\frac{-9}{16}(x^2 - 1)(3x + 1)$	??
ω_i	$\frac{1}{8}$	??	??	$\frac{1}{8}$

3. Utiliser la méthode de Newton-cotes ($n = 3$) pour approcher $\int_{-1}^{1} f(t)dt$;
4. Peut-on améliorer la précision de cette méthode en utilisant le même nombre de points ? si oui **décrire la méthode sans faire les calculs** ;
5. Donner une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en utilisant la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$.

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :

En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;

3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — jeudi 16 mars 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (8 POINTS) :

On souhaite trouver une valeur approchée de la racine de l'équation :

$$(E) \qquad \frac{e^{-x}}{x} = 1$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$

1. Montrer que r est solution de (E) si et seulement si $f(r) = 0$;
2. Montrer, en étudiant la fonction f, que l'équation $f(x) = 0$ admet **une et une seule solution** dans $\mathbb{R}$ et que cette solution se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$;
3. En utilisant la méthode de Dichotomie, localiser r dans un intervalle d'amplitude 0.25 (on donne $e^{-0.5} \simeq 0.61$ et $e^{-0.75} \simeq 0.47$) ;
4. Montrer que f est **concave** sur $[0, 1]$ et en déduire le schéma de Newton permettant l'approximation de r solution de $f(x) = 0$ (**choisir** x_0 et donner l'expression de x_{k+1} en fonction de x_k) ;
5. (x_n) est la suite de Newton définie précédemment, calculer x_1, x_2 et x_3 ; quel est le rang de l'erreur commise en considérant x_3 comme valeur approchée de r ?
6. Peut-on utiliser la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de r ?

Exercice 2 (7 POINTS) :

Soit f une fonction de classe C^1 définie sur $[-1, 2]$ et $P_2(.)$ **le polynôme de Lagrange qui interpole f aux trois points** 0, 1 et 2.

1. Expliciter le polynôme $P_2(.)$ puis donner une approximation de $f(\frac{1}{2})$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. Peut-on exprimer de la même manière $f(-\frac{1}{2})$?
2. En intégrant $P_2(.)$, donner une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$, expliquer pourquoi cette quadrature est exactement la méthode de Simpson ;
3. Dans le but d'améliorer la quadrature précédente, **on souhaite utiliser** 5 **points au lieu de** 3. Préciser les 5 points en justifiant chaque choix ;
4. **Sans refaire les calculs d'interpolation**, donner une nouvelle quadrature pour approcher $\int_0^2 f(x)dx$ en appliquant la méthode de Simpson sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$;
5. On suppose que $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$. Soit $P_3(.)$ le polynôme d'interpolation de f sur les 4 points $-1, 0, 1$ et 2. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que : $P_3(x) - P_2(x) = \lambda x(x-1)(x-2)$.

Exercice 3 (5 POINTS) : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par (avec $t > 0$) :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) - \frac{1}{1+t^2} y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. **On suppose que (PC) admet une solution unique**. Calculer cette solution (exacte) ;

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la **méthode du rectangle à droite** pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{1+t^2} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
3. On prend $h = 0.5$ calculer y_1, y_2 et y_3.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

——————CONTRÔLE ————*mercredi 10 janvier 2018*————2017 - 2018—

Présenter les valeurs approchées avec 4 chiffres après la virgule (par défaut).
Calculatrice non programmable autorisée (échange interdit). Documents et téléphones portables interdits

Exercice 1 (8.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que la fonction f admet un zéro unique, noté r, dans $[0, 1]$;
2. **Sans vérifier les conditions de convergence**, écrire la **suite récurrente** $(x_n)_n$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton** pour approcher r. En prenant $x_0 = 1$ calculer x_1 et x_2 et x_3. Que peut-on constater ?
3. Appliquer en **trois itérations**, sur l'intervalle $[0, 1]$, la méthode de **dichotomie** et comparer la dernière valeur obtenue avec x_3 ;
4. Déterminer le nombre d'itérations à exécuter pour obtenir une valeur approchée de r à 10^{-5} près ;
5. Par la suite, on se propose de démontrer que la suite $(x_n)_n$ définie dans $[2.]$ converge vers r :
   a. Étudier, sur $[0, +\infty[$, les variations de la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3rx^2 + 1 - r$ et déduire **son signe** ;
   b. On suppose que $x_0 \in [0, 1]$. Montrer par recurrence que $x_n \in [r, 1]$ pour tout $n \geq 1$;
   c. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante et conclure.

Exercice 2 (5 POINTS) :

Soit (P_C) le problème de Cauchy donné par : $(P_C) \begin{cases} y'(t) = -y(t) + e^t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

1. Montrer que (P_C) admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte) ;
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, on intègre l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis on utilise **la méthode du trapèze** pour approcher l'intégrale sur $[t_n,\ t_{n+1}]$ du **second membre** ;
   Donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n (en fonction de y_n, n et h).

Exercice 3 (6.5 POINTS) :

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ que l'on suppose assez régulière. On souhaite calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode du trapèze composite.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{b-a}{m}$ et $x_i = a + ih$ et $\widetilde{I}(m, f)$ la valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ donnée par la méthode du trapèze **composite** (ou la **méthode des m trapèzes**).

1. Cas $m = 1$
   a. Donner le polynôme $P_1(x)$ interpolant f en $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, formuler l'erreur d'interpolation $e_f(x) = |f(x) - P_1(x)|$ en fonction de a, b, x et f'' et donner une majoration de $e_f(x)$ pour $x \in [a, b]$;
   b. En intégrant $P_1(x)$, montrer que $\widetilde{I}(1, f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$;
   c. On donne $\int_a^b (b-x)(x-a)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$, déduire une bonne majoration de $E_{1,f} = \left|I - \widetilde{I}(1, f)\right|$.
2. On suppose maintenant que $m > 1$:

a. En utilisant le résultat établi en [1.], sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, donner l'expression de $\widetilde{I}(m, f)$;
b. Démontrer la majoration de l'erreur : $E_{m,f} = \left|I - \widetilde{I}(m, f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

3. Application : $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Calculer $\widetilde{I}(1, f)$ et $\widetilde{I}(2, f)$.

Question facultative (+1 POINT) :

Soit f un polynôme de degré n, $(x_i)_{i=0,\ldots,m}$ une famille de points distincts et $P_m(x)$ le polynôme d'interpolation de f par rapport aux points $(x_i)_{i=0,\ldots,m}$, montrer que si $m \geq n$ alors $P_m(x) = f(x)$.

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — *mercredi 14 février 2018* — 2017 - 2018

Présenter les valeurs approchées ***avec 4 chiffres après la virgule*** *(par défaut)*

Calculatrices non programmables autorisées (mais l'échange est interdit)

Documents et téléphones portables interdits

Exercice 1 (9 POINTS) :

Soit (E) l'équation donnée par : $\qquad (E) \qquad 10x = 9e^{-x}$

On donne : $\quad e^{-0.5} = 0.6065 \quad e^{-0.625} = 0.5352 \quad e^{-0.75} = 0.4723 \quad e^{-1} = 0.3678$

1. En utilisant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x - 9e^{-x}$, montrer que (E) admet **une seule solution**, notée x^*, dans l'intervalle $[0,1]$;
2. Appliquer la méthode de **dichotomie** pour localiser la solution x^* dans un intervalle $[a,b]$ d'amplitude : $b - a = 0,125$ puis donner une valeur approchée de x^* et une majoration de l'erreur ;
3. Écrire la **suite récurrente** $(x_n)_n$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton** pour approcher x^*. Choisir une bonne valeur initiale x_0 (parmi les deux valeurs, a et b, trouvées dans la question (2.)), vérifier **les conditions de convergence** et calculer x_1 ;
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$:
   a. Vérifier que x^* en **un point fixe** de g ;
   b. Vérifier que $g([0,1]) \subset [0,1]$ et, en s'assurant que $|g'(x)| = g(x)$, déterminer $L = \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$;
   c. Soit $(\overline{x}_n)_n$ la suite définie par **la méthode du point fixe** sur $[0,1]$. Montrer que $|\overline{x}_n - x^*| \leq L^n$ et déduire que la suite $(\overline{x})_n$ converge vers la solution de (E) ;
5. Combien faut-il calculer de termes, de la suite $(\overline{x})_n$, pour obtenir une valeur approchée à 10^{-10} près (ici, on ne demande pas de calculer cette valeur approchée !).
6. Quelle est la meilleur méthode ? Justifier.

Exercice 2 (6 POINTS) :

Soit f une fonction suffisamment régulière définie sur $[0,4]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer **le polynôme d'interpolation** de degré 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ aux points : 0, 3 et 4 puis donner une majoration de l'erreur $E(x) = |f(x) - P_2(x)|$;
2. En remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0,4]$ par l'intégrale de $P_2(.)$ sur le même intervalle, déterminer **la méthode de quadrature élémentaire** obtenue puis donner une majoration de l'erreur $I = |\int_0^4 f(x)dx - \int_0^4 P_2(x)dx|$ (on donne : $\int_0^4 |x(x-3)(x-4)|dx = \frac{71}{6}$) ;
3. Déterminer **l'ordre** de cette quadrature ;
4. Rappeler la définition de la méthode **de Simpson (simple)** et évaluer $I = \int_0^4 f(x)dx$ en utilisant cette Méthode. Expliquer pourquoi cette quadrature est différente de celle obtenue dans la question (2.) ;
5. En utilisant **deux sous intervalles**, évaluer $I = \int_0^4 f(x)dx$ avec la méthode de **Simpson composite**.

Exercice 3 (5 POINTS) :

Soit (P) le problème de Cauchy donné par : $\quad (P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que (P) admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte) ;

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
   a. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant **la méthode du point milieu** ;
   b. **Intégrer** l'équation différentielle, du problème, entre t_n et t_{n+2} et déduire, en utilisant le résultat de la question (2.a.), une relation entre y_{n+2}, y_{n+1} et y_n (et en fonction de h) ;
   c. Proposer une expression permettant de calculer y_1 et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de (P)).

Page1/1

SMP 3 :
Contrôle en Analyse Numérique et Algorithme
Année–2018/2019

Exercice 1(8points). On considère l'équation : $x^3 - 3x - 1 = 0$

Cette équation possède une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 2]$. Cette propriété est admise, on ne demande pas de la démontrer. On appelle r cette solution. On cherche à obtenir une valeur approchée de r en utilisant le théorème du point fixe. Pour cela on doit mettre l'équation sous la forme $x = \varphi(x)$.

(a) Expliquer pourquoi le choix de $\varphi_1(x) = \dfrac{(x^3-1)}{3}$ n'est pas judicieux (c'est à dire pas le bon)

Dans la partie suivante on pose $\varphi(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3x+1}$.

(b) Montrer que la fonction $\varphi : [1, 2] \to \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème du point fixe (de telle sorte que toute suite x_n définie par $x_0 = a \in [1, 2]$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n), (n \geq 0)$ converge vers r).

(c) Montrer que si $\varphi(x_0) > x_0$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que si $\varphi(x_0) < x_0$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Les deux cas peuvent-ils se produire ?

(d) On suppose $x_0 = 1$, trouver une approximation de r avec deux décimaux exactes.

(e) Auriez-vous recommandé la méthode décrite dans cet exercice pour trouver une approximation de r ?

justifiez précisément votre réponse.

Exercice 2.(6 points) Soit f une fonction de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer P_2, le polynôme d'interpolation de degré 2 de f, qui prend les même valeurs que f en $x = \dfrac{-2}{3},\ 0,\ \dfrac{2}{3}$.

2) Déterminer la méthode de quadrature obtenue en remplaçant l'intégrale de f sur $[-1, +1]$ par celle de P_2.

3) Montrer que cette méthode est précise d'ordre 3.

Exercice 3 (6 points)**.** On considère le problème de cauchy

$$(P3) \quad \{y'(t) = -(y(t))^m + \cos(t), \quad t \in I =]0, a[\subset \mathbb{R}^+ (a > 0) \text{ et } y(0) = 0$$

Où m est un entier impair.

1. Montrer que ce problème possède une solution unique locale.

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, soit $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et y_n une approximation de $y(t_n)$.

2.En utilisant la méthode de rectange à droite pour calculer l'intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$, écrire le schéma implicite permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n.

3. A partir du schéma obtenu à la question précédente, utiliser la méthode de Newton pour la résolution des équations non linéaires en partant de $x_0 = y_n$ avec un seul *pas* et déduire ainsi un nouveau schéma explicite.

SMP3 : Anlyse Numérique et Algorithme
année 2018-2019
Session de rattrapage

Exercice 1 (7points). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^5 - 7x + 4 \qquad (1.1)$$

(a) Montrer que f admet une racine unique dans l'intervalle $[0, 1]$, que l'on note r.

On se propose d'approcher cette racine avec 3 décimaux exactes en utilisant la méthode de Newton.

(b) Donner la formule de Newton

(c) Expliquer pourquoi est-il légitime d'employer la méthode de Newton?

(d) Sur quoi se fonde votre choix du point de départ ?

(e) Comment reconaitre que les tois décimaux d'une valeur approchée calculée par la méthode de Newton, sont ceux de r?

(f) Calculer alors une valeur approchée de r avec trois décimaux exacts,et porter les résultats dans le tableau suivant

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exercice 2 (7points) .1). Soit f une fonction de classe $C^1([-1, 1])$ et p le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points $x_0 = -1,\ x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Calculer le polynôme p.

2. En déduire une formule de quadrature $FQ(f)$ pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.

3. Étudier le degré de précision de cette formule de quadrature $FQ(f)$ ainsi trouvée.

4. A l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(t)dt$.

5. Soit $h = \dfrac{b-a}{2N}$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., 2N$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ de longueur $2h$.

En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de $\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 3 (6points). On considère le problème de cauchy

$$y'(t) = -k(y(t) - 25), \quad t > 0 \text{ et } y(0) = 75,\ k \in \mathbb{R}$$

1) Calculer la solution exacte de ce problème de Cauchy

2) On suppose $y(5) = 50$, calculer la constnte k.

Pour la suite on utilise la valeur de k trouvée à la question 2). Soit $h > 0$ un pas de temps, soit $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la solution numérique obtenue à l'aide du schém d'Euler explicite.

Etablir la relation entre u_{n+1} et u_n

4) On fixe $h = 1$, caluler $y(t_n)$ et u_n pour $n = 1, ..., 4$ et remplisser le tableau

n	1	2	3	4
$y(t_n)$				
u_n				

Correction

Exercice 1.

a)

$$\begin{cases} f(x) = x^5 - 7x + 4 \\ f \text{ est une fonction continue} \\ f(0) = 4 > 0 \\ f(1) = -2 < 0 \end{cases}$$

grâce au théorème des valeurs intermédiaires la fonction admet au moins une racine dans $[0, 1]$.

De plus la dérivée $f'(x) = 5x^4 - 7 < 0$ sur $[0, 1]$ donc la fonction est strictement décroissante ce prove la rcine de f dans $[0, 1]$ est unique, on la note alors r.

b) la méthode de Newton définit une suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ dont la formule est donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ étant fixé} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

c) Il est légitime d'utiliser la méthode de Newton car $f'(x)$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

d) Pour assurer la convergence de la méthode de Newton on doit choisir x_0 tel que $f(x_0)$ et f' soient de même signe.

comme $f' < 0$ sur $[0, 1]$ et $f(0) < 0$ on peut choisir $x_0 = 0$

e) Soit x_n un élément de la suite défine par la formule de Newton, alors les trois décimaux de x_n sont ceux de r si

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-3}$$

f)

SMP 3 :
Analyse Numérique et Algorithme
Session ordinaire
Année–2019/2020

Exercice 1 (8 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{4}\cos(x)$

1). Montrer que la fonction f admet un zéro unique, noté r, dans $[0, 1]$

2). Utiliser la méthode de Dichotomie pour calculer c_0, c_1, c_2 , c_3 et porter les résultats dans un tableau.

3). Déterminer le nombre d'itérations à executer pour obtenir une valeur approchée de r à 10^{-5} près.

4. Sans vérifier les conditions de convergence**,** Ecrire la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton.** En prenant $y_0 = 1$ calculer y_1 , y_2 et y_3. Que constatez-vous?

Soit g la fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{4}cos(x)$

5) Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses du théorème du point fixe et que la suite récurrente définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ $\forall n \geq 0$ est convergente et quelle est sa limite?

6). Cette convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend-elle du choix de u_0?

Exercice 2 (8 points) Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre réel, et soit w_1, w_2, w_3 trois nombres réels. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$, on considère la formule de quadrature

$$Fq(g) = w_1 g(-\alpha) + w_2 g(0) + w_3 g(\alpha)$$

1). Calculer α,w_1, w_2, w_3 pour que le degré d'exactitude de cette formule de quadrature soit maximal, quel est alors cet ordre ?

2). À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

3). Soit $h = \frac{b-a}{m}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., m$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en m intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de largeur h.

En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

4. Écrire l'algorithme associé à cette formule de quadrature.

Exercice 3 (4 points) Soit le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'(t) + \sin(y(t)) = 0, & t \in]0, T| \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$

1). Montrer qu'il existe une unique solution globale $y \in C^1(]0, T|, \mathbb{R})$.

SMP3

Analyse Numérique et Algorithme

session de rattrapage

Année–2019/2020

Exercice 1 (8 points). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x^5 - 9x + 10$

1) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation compplté avec des valeurs remarquables.

Déduire que f admet dans $\mathbb{R}$ une racine unique qui sera notée r.

Sans faire de calcul, on admet que $r \in [-1.4 \ \ , \ -1]$.

2) Ecrire la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton après avoir choisi convenablement x_0.

calculer $x_1,\ x_2$ et x_3, porter les résultats dans un tableau à 3 colonnes ($k,\ x_k$ et $f(x_k)$).

3) Donner une estimation de l'erreur $|x_{k+1} - r|$ en fonction de $|x_k - r|$

4) On considère la fonction $\varphi(x) = \dfrac{5}{9}(x^5 + 2)$

Verifier que r est un point fixe de φ.

5) Peut-on appliquer la méthode itérative $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ comme à la question 2) pour approcher r? justifier la réponse. $(1pt)$

Exercice 2 (7 points) Soit f une fonction $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0,\ldots,m}$ de l'intervalle $[a,b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à $m+1$ points pour approcher l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$.

On propose dans un premier temps (question 1, 2) la formule de quadrature à deux points :

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx Fq(g) = \frac{4}{3} g\left(-\frac{w}{2}\right) + \frac{2}{3} g(w)$$

où $0 < w < 1$ est à déterminer.

1). Déterminer w pour que cette formule de quadrature soit exacte avec un ordre maximal et donner cet ordre d'exactitude.

2. A l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale suivante : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$

3. En déduire une formule de quadrature, notée $Fq(f)$, pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

4. Écrire l'algorithme du calcul de $Fq(f)$.

Exercice 3 (5 points) On considère le problème de cauchy

$$(P3) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = K(y(t) - L), \quad t > 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{array} \right.$$

où K est un réel négatif, et $L \in \mathbb{R}^+$

1). Montrer qu'il existe une unique solution globale $y \in C^1(]0,T|,\mathbb{R})$ puis calculer cette solution.

2.Soit $\triangle t = \dfrac{T}{N}$ le pas temporel pour $n = 0,\ 1,\ ..,N$, on pose $t_n = n \triangle t$, y_n une approximation de $y(t_n)$.

Écrire le schéma d'Euler implicite pour calculer les $y_n,\ n = 1, ..., N$.

3) On suppose $L = 0$, calculer y_{n+1} en fonction de $n, \triangle t$ et y_0. Calculer aussi la différence entre y_n et $y(t_n)$.

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 28 février 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad x^3 - 3 = e^{-x}$

Notons : $f(x) = x^3 - e^{-x} - 3$ **et** $g(x) = \sqrt[3]{e^{-x} + 3}$. **Si** $1 \leq x \leq 2$ **alors :** $f''(x) > 0$
et $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2)$ avec $g'(1) \simeq -0.05$ et $g'(2) \simeq -0.02$

1. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, r_0, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [1, 2]$;
2. Appliquer **deux itérations** de la méthode de **Dichotomie**, **localiser** la racine r_0 dans un intervalle $[a_2, b_2]$ puis donner une **majoration de l'erreur** $|x_2 - r_0|$. Déterminer le **nombre d'itérations**, k, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_k, avec une **précision** $\varepsilon = 2^{-10}$?
3. Soit $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**. Écrire l'**algorithme** de la méthode (avec une précision $\varepsilon = 2^{-10}$), justifier un **bon choix** de $y_0 \in [a_2, b_2]$ et étudier la **convergence** de cette méthode. Exécuter les **deux premières itérations** ;
4. Soit $(\theta_n)_n$ la suite définie par : $\theta_n = g(\theta_{n-1})$ et $\theta_0 \in [1, 2]$.
   Vérifier que r_0 est un **point fixe** de g et **montrer** que $(\theta_n)_n$ **converge** vers r_0. Préciser le nombre d'itérations qu'il faut exécuter pour obtenir une précision $\varepsilon = 2^{-10}$.

Exercice 2 (2+2+2+2+2=10 POINTS) :

L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 2$).

1. **Cas particulier :** l'Intervalle $[-1, 1]$. Calculer le pas h puis recopier et compléter le tableau suivant (détailler les calculs) ;
2. Formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2. Puis, utiliser $P_2(x)$ pour déterminer une **approximation**, avec une **quadrature** $\widetilde{I}_{[-1,1]}$, de l'intégrale $I_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$;

i	0	1	2
x_i	??	??	1
$L_i(x)$	??	$1 - x^2$	??
$\int_{-1}^{1} L_i(x)dx$	$\frac{1}{3}$	??	??

3. On note $M_0 = \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(3)}(x)|$. Exprimer l'**erreur d'interpolation** $E_2(x) = |f(x) - P_2(x)|$ et donner une **majoration** de cette erreur. En déduire une majoration de l'**erreur d'intégration** $E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}|$ (on donne $\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{1}{2}$) ;
4. **Cas général** : l'intervalle $[a, b]$. Utiliser **un changement de variable affine** (entre $[a, b]$ et $[-1, 1]$) pour montrer que :
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$
5. On se donne une **discrétisation uniforme** de l'intervalle $[a, b]$ (**4 sous-intervalles**, avec le pas $h = \frac{b-a}{4}$). Donner une approximation $\widetilde{I}^4_{[a,b]}$ de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant une **méthode composite** de la quadrature précédente.

QS (**Question supplémentaire : +1.5 Points**) Un **problème de Cauchy** (PC) est défini par une équation différentielle $y' = h(t, y)$ et une condition initiale $y(x_0) = y_0$ (On suppose que (PC) admet exactement une solution). **Intégrer** l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ puis utiliser la **quadrature précédente** et l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+2}, y_{i+1} et y_i. Transformer cette relation en une **méthode explicite** permettant le calcul d'une solution approchée de ce problème.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — 04 avril 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (0.75+1.25+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation donnée par $f(x) = 0$ avec f, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$.

1. L'équation (E) admet-elle **une solution** dans l'intervalle $[-1, 1]$?
2. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [0, 1]$;
3. **Localiser** la racine $\overline{x}$ dans un intervalle $[c, d]$ d'amplitude $d - c = 0.25$. Déterminer le **nombre d'itérations**, p, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_p, avec une **précision** $\varepsilon = 10^{-6}$?
4. Montrer, en utilisant la méthode de Newton, que **l'algorithme** (Alg) permet de définir une suite $(z_n)_n$ d'approximations de $\overline{x}$:
$$(Alg)\ \begin{cases} z_0 = 1 \\ \text{Tant que } |f(z_n)| > 10^{-5} \text{ Faire :} \\ z_{n+1} = \frac{2z_n^3+z_n^2+3}{3z_n^2+2z_n+3} \\ \text{Fin} \end{cases}$$
Identifier **la précision** recherchée et étudier **la convergence** de cette méthode. Calculer z_1 et z_2 ;
5. Transformer l'équation (E) en un problème de point fixe, de la forme $h(x) = x$, tel que h est une fonction rationnelle à déterminer (de la forme $\frac{\text{constante}}{\text{polynôme de degré 2}}$).
Soit $(t_n)_n$ la suite définie par : $t_0 = 0.5$ et $t_n = h(t_{n-1})$. Calculer t_1 et t_2.
Est ce que la suite $(t_n)_n$ est **convergente** ? Si oui, déterminer sa limite.
On donne :
$$-0.5 \leq \frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2} \leq -0.3 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1]$$

Exercice 2 (2+3+2=7 POINTS) : Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

1. Déterminer les **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ et formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2.
2. Calculer $\int_0^3 L_i(x)dx$, $i = 0, 1, 2$, puis utiliser le polynôme d'interpolation, $P_2(x)$, pour déterminer une **quadrature**, $Q = 3\sum_{i=0}^{i=3} \omega_i f(x_i)$, de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Quel est l'ordre de Q ?
3. Utiliser la **méthode de Simpson** pour donner une deuxième **quadrature** $\widetilde{I}$ permettant, aussi, d'approcher l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Comparer Q et $\widetilde{I}$ puis expliquer les différences.

Exercice 3 (1+2=3 POINTS) :

1. Rappeler la formule de quadrature approchant l'intégrale $\int_c^d g(t)dt$ par la méthode **du trapèze** puis l'appliquer dans le cas $g(t) = F(t, y(t))$;

2. On suppose que le problème de Cauchy, (P), admet une solution unique :

$$(P)\ \begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Intégrer l'équation différentielle sur l'intervalle $[\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1}]$ puis utiliser **la méthode du Trapèze** et, pour tout indice j, l'**approximation** $y(\mathbf{t}_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+1} et y_i (en fonction de F, $\mathbf{t}_i$ et $\mathbf{t}_{i+1}$).

QS. (+1 POINT) Transformer la relation précédente en **une méthode explicite**.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 17 janvier 2022 — 2021 - 2022

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+1.5=3.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$

1. En utilisant la **méthode de Newton**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f, noté P, sur la base des points : -2, -1 et 1. Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(0)$.
2. Calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = 0$ puis utiliser la formule du cours. Comparer et Expliquer.

Exercice 2 (2+3+3.5+3.5=12 POINTS) :

Soit (E) l'équation suivante : $(E)\quad \ln(1+x) = 1 - x^2$

1. Étudier, sur l'intervalle $[0;2]$, les **variations** de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1+x)$. En déduire que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée x^*, dans l'intervalle $[0;2]$;
2. Appliquer la méthode de **Dichotomie** pour **localiser** la solution x^* dans un intervalle $[a;b]$ d'**amplitude** $A = b - a = 0.5$. Déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour pouvoir localiser la solution dans un intervalle d'amplitude $A = 0.0625$;
3. On note $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**.
   a) Écrire l'**algorithme**, de cette méthode, permettant d'obtenir une **précision** d'au moins 10^{-6} ;
   b) Justifier un **bon choix** de l'intervalle initial et de la **valeur initiale** y_0 puis calculer y_1 ;
   c) Étudier la **convergence** de cette méthode et expliquer pourquoi on peut la considérer comme la meilleure méthode ?
3. Sur l'intervalle $[0.5;1]$, on considère le **schéma numérique** définissant la suite $(t_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_n = g(t_{n-1}) = \sqrt{1 - \ln(1+t_{n-1})} \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

   On donne : $\sup_{x\in[0.5;1]} |g'(x)| = 0.45$
   a) **Vérifier** que ce schéma peut être utilisé pour déterminer une valeur approchée de x^* (la solution de (E)). **Identifier** une méthode classique qui peut générée ce schéma et la suite $(t_n)_n$;
   b) Étudier la **convergencee** de ce schéma ;
   c) Formuler une **majoration** de l'erreur $|t_n - x^*|$ puis déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une précision d'au moins 10^{-10}.

Exercice 3 (1+2+1.5=4.5 POINTS) :

Soient x_0 et x_1 deux points tels que $x_0 = -1$ et $x_1 = 2$ et soit f une fonction continue sur $[-1; 2]$.

1. Déterminer les deux **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_0(x)$ et $L_1(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0 et x_1 (noté Q) ;
2. **Intégrer**, sur l'intervalle $[-1; 2]$, les deux polynômes de Lagrange et le polynôme Q et déduire une **quadrature** $\widetilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} f(t)dt$, en précisant les deux **poids** ω_0 et ω_1.
   Peut-on associer cette quadrature à une **méthode classique** ? Laquelle ?
3. Utiliser la méthode **des trapèzes** (exactement 3 trapèzes) pour formuler une deuxième approximation l'intégrale I (notée $\widehat{I}$). Sans faire de calcul supplémentaire, comparer $\widetilde{I}$ et $\widehat{I}$ et expliquer.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — 21 février 2022 — 2021 - 2022

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+3+3+3=11 POINTS). Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad 1+x=e^{1-x^2}$

1. Écrire (E) sous forme d'une équation $f(x)=0$ (f une fonction à déterminer). Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée $\overline{r}$, dans l'intervalle $[0;1]$.

2. Écrire l'**algorithme** de la méthode de Dichotomie permettant d'obtenir une valeur approchée de $\overline{r}$ avec une **précision** d'au moins ε.
   Faire les calculs pour $\varepsilon = 2^{-2}$, **localiser** la solution dans un intervalle $[a,b] \subset [0,1]$ et donner une **valeur approchée** de $\overline{r}$.

3. On souhaite appliquer la **méthode de Newton** sur l'intervalle $[0,1]$ et on note $(t_n)_n$ la suite générée par cette méthode. Rappeler le **principe géométrique** de la méthode et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.
   Calculer $f''(0.5)$ et $f''(0.75)$. Que peut-on dire par rapport à la **convergence** de cette méthode.

4. Sur l'intervalle $[0;1]$, on considère **la modification de la méthode de Newton** qui consiste à remplacer la tangente T_n, au point $(t_n, f(t_n))$, par la droite D_n parallèle à la tangente T_0 (au point $(t_0, f(t_0))$ avec $f'(t_0) \neq 0$) et qui passe par $(t_n, f(t_n))$. Ainsi t_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite D_n avec l'axe des abscisses (OX). Faire un schéma et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

Exercice 2 (2.5+1.5=4 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^3-1$

1. En utilisant la **méthode directe**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f, noté P, sur la base des points : -1, 0 et 1. Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(-\frac{1}{2})$ et calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x=-\frac{1}{2}$.

2. Sans faire de calcul supplémentaire, donner le **polynôme d'interpolation** de f, noté Q, sur la base des points : -2, -1, 0 et 1. Que peut-on dire de l'**erreur** au point $x=-\frac{1}{2}$ (par rapport à Q).

Exercice 3 (1.5+2+1.5=5 POINTS) :

Soient $x_0=-2$, $x_1=0$ et $x_2=1$ et soit f une fonction continue sur $[-2;1]$.

1. On donne $L_0(x)=\frac{1}{6}(x^2-x)$, déterminer les deux autres **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_1(x)$ et $L_2(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 (noté P).

2. On donne $\int_{-2}^{1} L_1(x)dx = \frac{9}{4}$, calculer $\int_{-2}^{1} L_0(x)dx$ et $\int_{-2}^{1} L_2(x)dx$. Puis, en **Intégrant** le polynôme P (sur l'intervalle $[-2;1]$) déduire une **quadrature** $\widetilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-2}^{1} f(t)dt$. On donne $\omega_0 = \frac{1}{4}$, préciser les deux autres **poids** ω_1 et ω_2.

3. Utiliser la méthode **de Simpson** pour formuler une deuxième approximation de l'intégrale I (notée $\widehat{I}$). Expliquer la différence entre $\widetilde{I}$ et $\widehat{I}$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 14 janvier 2023 — 2022 - 2023

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (1.5+2.5+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8 - x^3$.

1. **Étudier** la fonction f sur $\mathbb{R}$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que f est **bijective** et vérifier que l'équation $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ admet **une solution unique** $\widetilde{x}$. Quelle est la valeur **exacte** de $\widetilde{x}$?
2. Vérifier que $\widetilde{x} \in [1; 4]$ et calculer les **trois** premières valeurs approchées, c_0, c_1 et c_2, données par **la méthode de Dichotomie**. Donner une majoration de l'erreur de l'approximation de $\widetilde{x}$ par c_2.
   Déterminer le **nombre d'itérations**, n, nécessaires pour obtenir une valeur approchée, c_n, de $\widetilde{x}$ avec une précision au moins égale à 10^{-5}.
3. Définir la suite, x_n, des itérés de **la méthode de Newton**. Préciser, x_0, la meilleure **initialisation** possible parmi les quatre valeurs suivantes : 1, 4, 1.75 et 2.5 puis calculer x_1. Étudier la **convergence** de cette méthode.
4. Transformer l'équation (Eqt) en un problème de recherche de **point fixe** et écrire l'**algorithme** correspondant (on ne demande pas l'étude de la convergence).

Exercice 2 (3+1.5=4.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et les trois points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant **<u>DEUX</u>** parmi les trois méthodes habituelles (Lagrange, Newton et Directe).
2. Donner une **majoration** de l'erreur d'interpolation.

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App)\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

1. Déterminer α, β et γ pour que (App) soit **<u>exacte</u>** pour les polynômes de degré 0, 1 et 2 (on peut utiliser successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$).
2. On suppose que $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, puis on se donne les points $\{x_i\}_{i=0\ldots n}$ de subdivision de l'intervalle $[a; b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. En utilisant un **changement de variable affine**, dans I, déduire la formule de **quadrature** suivante :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}))$$

3. En déduire une formule de quadrature **composite** pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = y_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Vérifier que (PC) admet une **solution unique** et déterminer cette solution (**exacte**).
2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser la méthode du **trapèze** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n (Schéma de Crank-Nicolson).
3. On suppose que $h = \frac{1}{4}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE —17 février 2023— -2022 - 2023-

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+2+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x-2}$.

1. **Étudier** la fonction g sur $[-2, 0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème (PF) $g(x) = x$ admet **une solution unique** r. Quelle est la valeur **exacte** de r ?
2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF), et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.
3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'un équation non linéaire de la forme (Eqt) $f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eqt), appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r.
4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par : $\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} \end{cases}$

   Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.

Exercice 2 (2+2+1.5=5.5 POINTS) : (Les trois questions sont indépendantes)

Soit f la fonction donnée par le tableau suivant :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x_i)$	1	2	9	28

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant la méthode de **Lagrange**.
2. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_1, x_2 et x_3 en utilisant la méthode de **Newton**.
3. Donner une valeur approchée de $\int_0^3 f(x)dx$ en utilisant la méthode **des trapèzes** (composite avec 3 trapèzes).

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(x_0) + f(1)\right)$$

1. Déterminer x_0 pour que (App) soit **<u>exacte</u>** pour les polynômes de degré 0 et 1 (On peut utiliser $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$).
2. On suppose que $x_0 = 0$, en utilisant un **changement de variable affine**, dans $I = \int_a^b f(x)dx$, déduire une formule (Q) permettant de calculer une valeur approchée de I.
3. Vérifier que (Q) est une **quadrature** de type Newton-cotes, laquelle ? Déterminer **l'ordre** exacte de (Q).

Exercice 4 (1.5+2=3.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. On suppose que (PC) admet une **solution unique**. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à gauche** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à droite** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Transformer le schéma implicite ainsi obtenu en un schéma explicite.

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**

Chapitre 2

ANNALES DES EXAMENS - SOLUTIONS

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

EXAMEN 2015 — Correction — 2016 - 2017

Exercice 1 : On a :

90	2	45	0
45	2	22	1
22	2	11	0
11	2	5	1
5	2	2	1
2	2	1	0
1	2	0	1

97	2	48	1
48	2	24	0
24	2	12	0
12	2	6	0
6	2	3	0
3	2	1	1
1	2	0	1

$$(90)_{10} = (1011010)_2 \text{ et } (97)_{10} = (1100001)_2$$

On effectue la multiplication binaire pour obtenir :

$$(1011010)_2 \times (1100001)_2 = (10001000011010)_2$$

Exercice 2 : 1. On a :

$$(E) \Leftrightarrow x(1+e^x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x(1+e^x) - e^x = 0$$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car les polynômes et la fonction exponentielle sont continues et on a :

$$f(0) = -e^0 = -1 \text{ et } f(1) = 1 \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

D'autre part,

$$f'(x) = 1(1+e^x) + xe^x - e^x = 1 + e^x + xe^x - e^x = 1 + xe^x > 0 \text{ pour } x \in [0,1]$$

La fonction f est croissante sur $[0,1]$. On en déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que l'equation $f(x) = 0$ et par conséquent (E) admet une solution unique s dans l'intervalle $[0,1]$.

2. On a :

$$(E) \Leftrightarrow x(1+e^x) = e^x \Leftrightarrow x = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow g(x) = x \text{ car } 1+e^x \neq 0 \text{ avec } g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Donc, un schéma point fixe peut être donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k) = \frac{e^{x_k}}{1+e^{x_k}} \\ x_0 \in [0,1] \text{ par exemple } x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. On a :

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

$$g''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^x(e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} \leq 0$$

car $e^x \geq e^0 = 1$ sur $[0,1]$. On en déduit que g' est décroissante sur $[0,1]$ et :

$$|g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)| = g'(0) = \frac{1}{4}$$

D'après le théorème des accroissements finis, la fonction g est contractante de coefficient $k = \frac{1}{4}$.

D'autres part, g est continue car e^x est continue et $1 + e^x \neq 0$.

Finalement, $g'(x) > 0$ et g croissante, donc :

$$g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [\frac{1}{2}, \frac{e^1}{1+e^1}] \subset [0,1] \text{ car } \frac{e^1}{1+e^1} < 1$$

On en déduit que les conditions de convergence sont vérifiés et que le schéma converge vers le point fixe tel que $g(s) = s$ et s est la solution de (E).

4. La méthode de Newton est donnée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 \in [0,1] \end{cases}$$

On a :

$$f(x) = x + xe^x - e^x \Rightarrow f'(x) = 1 + e^x + xe^x - e^x = 1 + xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x > 0$$

On prenant en considération les conditions de convergence de la méthode de Newton on peut choisir $x_0 = 1$ ou généralement x_0 plus proche de 1 avec $f(x) > 0$.

Exercice 3 : La méthode de Gauss-Legendre utilise les polynômes de Legendre définis par :

$$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathbb{L}_n(x) - n\mathbb{L}_{n-1}(x), \text{ avec } \mathbb{L}_0 = 1 \text{ et } \mathbb{L}_1 = x$$

On a pour $n = 2$:

$$\mathbb{L}_0 = 1, \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Les points d'intégration :

$$(x_i)_{i=0,\dots,2-1}, \text{ racines du polynôme de Legendre } \mathbb{L}_2 \text{ avec } x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Les poids $(\omega_i)_{i=0,\dots,2-1}$ sont aussi donnés par :

$$\omega_0 = \frac{2}{(1-x_0^2)(\mathbb{L}_2'(x_0))^2} = 1$$

$$\omega_1 = \frac{2}{(1-x_1^2)(\mathbb{L}_2'(x_1))^2} = 1$$

Donc :

$$I(f) \simeq \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) \simeq f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Exercice 4 :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } x_i = -2, -1, 0, 1, 2$$

On a :

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)} = \frac{(x^2-1)(x^2-2x)}{24}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{(x^2-4)(x^2-x)}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{4}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{(x^2-4)(x^2+x)}{-6}$$

$$L_4(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+2x)}{24}$$

Donc :

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{i=4} f(x_i)L_i(x) = \frac{1}{5}L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + 1L_2(x) + \frac{1}{2}L_3(x) + \frac{1}{5}L_4(x)$$

D'autre part, on a :

$$|E(x)| = |f(x) - P_4(x)| = |\frac{1}{(5)!}\pi_5(x)f^{(5)}(\xi)| = |\frac{1}{120}(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)f^{(5)}(\xi)|$$

$$|E(x)| = |\frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)||f^{(5)}(\xi)| \leq M_5|\frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)| = \frac{5}{6}|x(x^2-1)(x^2-4)|$$

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE 2015 —— Indications —— 2016 - 2017

Exercice 1 : 1. On a :

$$f(x) = x^2 - a \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Le schéma numérique de la méthode de Newton est donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} \\ x_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

2. On a :

$$x_1 = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} \text{ et } 0 < x_0 < c \Rightarrow x_1 - c = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} - c = \frac{x_0^2 + a - 2cx_0}{2x_0} = \frac{x_0^2 + c^2 - 2cx_0}{2x_0} = \frac{(x_0 - c)^2}{2x_0} > 0$$

Donc : $x_1 > c$.

3. Par récurrence, avec la condition initiale $x_0^2 > a$, en supposant que $x_k^2 > a$ on a :

$$x_{k+1}^2 - a = (\frac{x_k^2 + a}{2x_k})^2 - a = \frac{x_k^4 + 2ax_k^2 + a^2}{4x_k^2} - a = \frac{x_k^4 + 2ax_k^2 + a^2 - 4ax_k^2}{4x_k^2} = \frac{(x_k^2 - a)^2}{4x_k^2} > 0$$

Donc :

$$x_n^2 > a \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

4. Distinguons deux cas : $x_0 > c$ et $x_0 < c$ (si $x_0 = c$ aucun calcul à faire !).

1er cas :

$$x_0 > c \Rightarrow x_0^2 > c^2 = a \Rightarrow x_n^2 > a = c^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ d'après [3.]}$$

Vérifions par récurrence que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: On a $x_0 > c > 0$ et si $x_n > 0$ alors $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} > 0$.

Alors, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} < 0$$

Donc, si $x_0 > c$ alors $(x_n)_n$ est décroissante.

2eme cas : Si $x_0 < c$ alors, d'après [2.], $x_1 > 0$ et en retrouve le 1er cas en considérant x_1 comme le premier terme de la suite. Donc, la suite $(x_n)_n$ est décroissante et comme elle est minorée par c ($x_n^2 > a$ et $x_n > 0$ impliquent que $x_n > \sqrt{a} = c$)on en déduit qu'elle est convergente.

5. La suite $(x_n)_n$ est convergente, on pose $l = \lim_{n \to +\infty} x_n$ et comme f et f' sont deux fonctions continues (polynômes), on en déduit :

$$l = \frac{l^2 + a}{2l} \Rightarrow l^2 = a \text{ et comme } l = \lim_{n \to +\infty} x_n \geq \sqrt{a} = c \Rightarrow l = \sqrt{a} = c$$

6. Soit :

$$g(x) = f(x) + x = x^2 + x - a$$

On a :

$$|g(2) - g(1)| = 4 + 2 - a - (1 + 1 - a) = 4 > |2 - 1|$$

On en déduit que g n'est pas contractante et la méthode point fixe n'est pas applicable dans ce cas.

Exercice 2 : 1) On a :

$$l \in [0, \pi] \text{ et } l = 1 - \frac{1}{4}\cos(l) \Rightarrow l \text{ est solution de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur } [0, \pi] \text{ avec } f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}\cos(x)$$

f est continue sur $[0, \pi]$ car $\cos$ est continue et on a :

$$f(0) = -1 + \frac{1}{4}\cos(0) = \frac{-3}{4} < 0 \text{ et } f(\pi) = \pi - 1 + \frac{1}{4}\cos(\pi) = \pi - \frac{5}{4} \simeq 1.89 > 0$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet au moins une solution et l existe.
D'autre part,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{4}\sin(x) \text{ or } -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq f'(x) \leq \frac{5}{4}$$

D'ou f est croissante et l est unique.
l est l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[0, \pi]$, f est continue et croissante, nous pouvons donc utiliser la méthode de dichotomie.

k	0	1	2	3
$[a_k, b_k]$	$[0, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$
l_k	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{16}$

Car :

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0.57 > 0 \text{ et } f(0) \times f(\frac{\pi}{2}) < 0$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\pi - 8 + \sqrt{2}}{8} \simeq -0,3 < 0 \text{ et } f(0) \times f(\frac{\pi}{4}) > 0$$

$$f(\frac{3\pi}{8}) = \frac{3\pi}{8} - 1 + \frac{1}{4}\cos(\frac{3\pi}{8}) \simeq 0.42 \text{ et } f(\frac{\pi}{4}) \times f(\frac{\pi}{8}) < 0$$

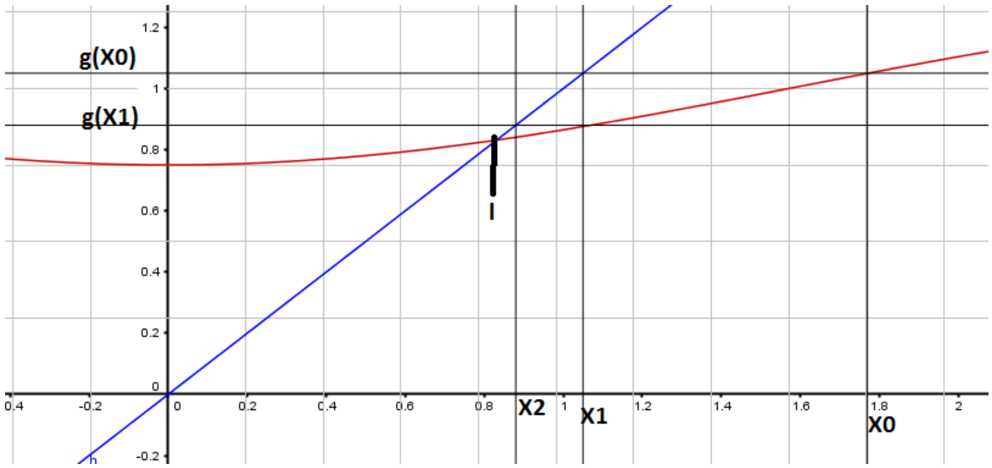
Après trois itérations ($k = 1, 2, 3$) l'approximation est $\frac{5\pi}{16}$
L'erreur maximale est :

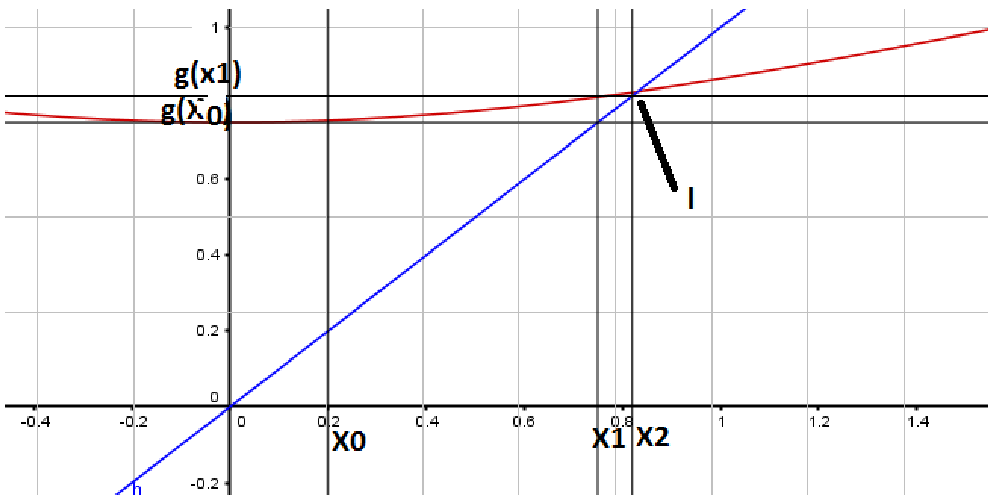
$$|b_3 - a_3| = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Utilisation de la formule du cours :

$$E_n = \frac{b - a}{2^n} \Rightarrow E_3 = \frac{\pi - 0}{2^3} = \frac{\pi}{8}$$

2)
2.1. Exemples de construction graphique :





En se basant sur les deux représentations (x_0 plus proche de 0 et plus proche de π) nous pouvons remarquer que les x_k s'approchent de l c'est à dire qu'il y a une possibilité de convergence (à vérifier d'une manière rigoureuse).

2.2. On a :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{4}\sin(x) \geq 0 \text{ car } x \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Donc, en utilisant le théorème des accroissements finis, g est contractante de rapport $\frac{1}{4}$.

x	0		π
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

g est continue et contractante avec

$$g([0, \pi]) = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}] \subset [0, \pi]$$

Donc le schéma point fixe convergence, pour tout $x_0 \in [0, \pi]$, vers la solution l de l'équation $x = g(x)$.

2.3. g est contractante de rapport $\frac{1}{4}$ on a, par récurrence,

$$|x_k - l| = |g(x_{k-1}) - g(l)| \leq \frac{1}{4}|x_{k-1} - l| \leq (\frac{1}{4})^2|x_{k-2} - l| \leq ... \leq (\frac{1}{4})^k|x_0 - l|$$

Comme x_0 et l sans dans $[0, \pi]$ on a : $|x_0 - l| < \pi$ et on en déduit :

$$|x_k - l| \leq \pi(\frac{1}{4})^k$$

Pour une une approximation à 10^{-3}, il suffit de considérer k tel que :

$$\pi(\frac{1}{4})^k \leq 10^{-3} \Rightarrow k\ln(\frac{1}{4}) \leq \ln(\frac{10^{-3}}{\pi}) \Rightarrow k \geq \frac{-\ln(\frac{10^{-3}}{\pi})}{\ln(4)} \simeq 5.8$$

Au minimum 6 itérations sont nécessaires pour obtenir la précision demandée.

SMP3 - M20 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE
CONTRÔLE CONTINU JANVIER2016 DURÉE : 1H30
CORRECTION

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

Soient $X = 101$ et $Y = 61$.

1. Donner les écritures binaires de X et de Y ;
   On a :(1 pt)

$$X = 101 = 2 \times 50 + 1$$
$$50 = 2 \times 25 + 0$$
$$25 = 2 \times 12 + 1$$
$$12 = 2 \times 6 + 0$$
$$6 = 2 \times 3 + 0$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$
$$1 = 2 \times 0 + 1$$

Donc :

$$X = \overline{1100101}^{2}$$

et(1 pt)

$$Y = 61 = 2 \times 30 + 1$$
$$30 = 2 \times 15 + 0$$
$$15 = 2 \times 7 + 1$$
$$7 = 2 \times 3 + 1$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

Donc :

$$Y = \overline{111101}^2$$

2. Effectuer les **opérations binaires** suivantes : $X + Y$ et $X \times Y$.
   Somme binaire :(1 pt)

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   Multiplication binaire :(2 pts)

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & \times & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

EXERCICE 2 (8 POINTS) :

Utiliser des valeurs approchées à trois chiffres après la virgule.

On considère l'équation (E) donnée par :

$$(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$$

1. Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser ;(0,5 pt)
   On a :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 10x = 20 - 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

2. Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;
   (1,5 pts) Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et on a :

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 20 = -7 \text{ et } f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 10 \times 2 - 20 = 16$$

   Donc, l'équation $f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$. D'autre part :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ car } \Delta = 16 - 120 = -104 < 0$$

   On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $[1, 2]$ et par conséquent, l'équation $f(x)$ admet au seule solution $\overline{x}$ dans cet intervalle.

3. Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;(2,5 pt)
   $f(x)$ admet au seule solution dans l'intervalle $[1, 2]$:
   On a :
   $$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ et } f(1,5) = 2,875 \text{ avec } f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1; 1,5]$$
   et :
   $$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25 \text{ et } f(1,25) = -2,422 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,5]$$
   ensuite :
   $$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 \text{ et } f(1,375) = 0,130 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,375) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,375]$$
   La valeur exacte $\overline{x}$ et valeur approchée x_3 sont dans l'intervalle $[1,25; 1,375]$ donc
   $$|\overline{x} - x_3| \leq 1,375 - 1,25 = 0,125$$
   On peut aussi utiliser la formule du cours
   $$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\overline{x} - x_3| \leq \frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$
4. On considère le schéma itératif suivant :
   $$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$
   a. Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;(1 pt)
   La méthode s'écrit :
   $$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \text{ avec } g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$
   Il s'agit d'une méthode de point fixe de fonction g et on a (remarquons que $x^2 + 2x + 10 > 0$) :
   $$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{20}{x^2+2x+10} = x \Leftrightarrow 20 = x^3 + 2x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (E)$$
   Autre méthode :
   $$(E) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{x^2+2x+10} = g(x)$$
   b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$) ;
   On a :(1,5 pts)
   $$g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} \Rightarrow g'(x) = -20\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} < 0 \text{ pour } x \in [1, 2]$$

g est décroissante et on a :

$$g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ et } g(2) = \frac{20}{18} = 1,111$$

On en déduit que

$$g([1,2]) \subset [1,2]$$

D'autre part, d'après le théorème de Accroissements finis (la fonction g est continue derivable), on a :

$$\text{pour tous } x,y \in [1,2],\ \text{il existe } c \in]1,2[\text{ tel que } |g(x)-g(y)| = |g'(c)||x-y| \leq \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)||x-y| \leq \frac{40}{132}|x-$$

On en déduit que g est contractante.

On conclusion, g vérifie les conditions de convergence et par conséquent la méthode de point fixe converge vers la solution de (E).

c. Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;(1 pt)

On a :

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = g(1) = \frac{20}{13} = 1,538$$

$$x_1 = \frac{20}{13} = 1,538 \Rightarrow x_2 = g(x_1) = \frac{20}{(\frac{20}{13})^2 + 2\frac{20}{13} + 10} = \frac{338}{261} = 1,295 \text{ ou } x_2 = g(1,538) = 1,295$$

$$x_2 = \frac{338}{261} = 1,295 \Rightarrow x_3 = g(\frac{338}{261}) = \frac{20}{(\frac{338}{261})^2 + 2\frac{338}{261} + 10} = \frac{136242}{97189} \text{ ou } x_3 = g(1,295) = 1,401$$

.

EXERCICE 3 (7 POINTS) :

Soit f une fonction donnée par le tableau de valeurs suivant :

x_i	-1	0	1	2	4
$f(x_i)$	3	1	3	15	93

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de f basé sur les trois points -1, 0 et 1 ;(2 pts)

   Les polynômes caractéristiques de Lagrange sont donnés par :

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1 - x^2$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

   Le polynôme d'interpolation de f est donné par :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{i=2} f(x_i)l_i(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) = 3\frac{x(x-1)}{2} + 1 - x^2 + 3\frac{x(x+1)}{2}$$

$$P_2(x) = 2x^2 + 1$$

2. Donner une valeur approchée de $f(-\frac{1}{2})$. Peut-on utiliser la question 1. pour calculer une valeur approchée de $f(\frac{3}{2})$?(1 pt)
   P_2 est le polynôme d'interpolation de f, il constitue une approximation f sur l'intervalle $[-1,1]$ ($f(x) \sim P_2(x)$) :
   $$f(-\frac{1}{2}) \sim P_2(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$$
   On ne peut pas utiliser P_2 pour calculer une valeur approchée $f(\frac{3}{2})$ car $\frac{3}{2}$ n'appartient pas à $[-1,1]$.
3. Peut-on améliorer la précision du polynôme d'interpolation de f ? Si oui, décrire la méthode (sans faire les calculs) ;(1 pt)
   La réponse est oui, en suivant les étapes :
   - Déterminer le polynôme de Tchebychev T_3
   - Déterminer les trois racines de Tchebychev (de T_3)
   - Déterminer le polynôme d'interpolation sur la base des racines de Tchebychev.

4. En supposant que f est continue sur $[-1,4]$, utiliser la méthode de Newton-cotes ($n = 2$) pour calculer une valeur approchée de :(2 pts)
   $$I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$
   Déterminons les poids :
   $$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x(x-1)}{2}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x^2-x)dx = \frac{1}{4}[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}$$
   $$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - x^2dx = \frac{1}{2}[x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{4}{6}$$
   $$w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} l_2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x^2+x)dx = \frac{1}{4}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}$$
   Donc :
   $$I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = (1-(-1))\left(w_0f(-1) + w_1f(0) + w_2f(1)\right) = 2\left(\frac{1}{6}\times 3 + \frac{4}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 3\right) = \frac{10}{3}$$
5. En utilisant la même méthode, déduire une valeur approchée de :(1 pt)
   $$I_2 = \int_{0}^{4} f(x)dx$$
   On utilisant la formule du cours et en remarquons que les poids sont les mêmes sur $[-1,1]$ et $[0,4]$, on a :
   $$I_2 = \int_{0}^{4} f(x)dx = (4-0)\left(w_0f(0) + w_1f(2) + w_2f(4)\right) = 4\left(\frac{1}{6}\times 1 + \frac{4}{6}\times 15 + \frac{1}{6}\times 93\right) = \frac{308}{3}$$

Année universitaire 2015-2016

Rattrapage

Solution du Rattrapage
Analyse numérique
Smp-S3 (Octobre 2016)

Ex-1: (4p) On a $a = 1$, $b = 2$ et $n = 10$.
Le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0,1$
$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \int_1^{1,1} \sqrt{x}dx + \int_{1,1}^{1,2} \sqrt{x}dx + ... + \int_{1,8}^{1,9} \sqrt{x}dx + \int_{1,9}^{2} \sqrt{x}dx$
On applique la formule des rectangles sur chaque sous intervalle, on obtient
$\int_1^2 \sqrt{x}dx = h\left(\sqrt{1} + \sqrt{1,1} + ... + \sqrt{1,8} + \sqrt{1,9}\right) \simeq 1,1981 \approx 1\,(= 10 \times 0,1)$.

Ex-2: (5)
Convertissons tout d'abord 34 en binaire.
Cela donne
$34 = 217 + 0$
$17 = 28 + 1$
$8 = 24 + 0$
$4 = 22 + 0$
$2 = 21 + 0$
$1 = 20 + 1$
On a donc $(34)_{10} = (100010)_2$.
Convertissons maintenant 27 en binaire. On a
$27 = 213 + 1$
$13 = 26 + 1$
$6 = 23 + 0$
$2 = 21 + 1$
$1 = 20 + 1$
et $(27)_{10} = (11011)_2$.
On effectue maintenant l'addition de $(100010)_2$ et $(11011)_2$.

L'addition en binaire fonctionne de la manière suivante

+	0	1
0	0	1
1	1	10

D'où l'opération suivante
100010
+ 11011
= 111101
On a $(100010)_2 + (11011)_2 = (111101)_2$.
- Or $(34)_{10} + (27)_{10} = (61)_{10}$,
vérifions si $(61)_{10} = (111101)_2$.
$2 \times 0 + 1 = 1$
$2 \times 1 + 1 = 3$
$2 \times 3 + 1 = 7$

$2 \times 7 + 1 = 15$
$2 \times 15 + 0 = 30$
$2 \times 30 + 1 = 61$
On a bien $(61)_{10} = (111101)_2$,
le résultat obtenu en binaire est bien conforme au résultat obtenu en base 10.

Ex-3: (7p)
1) L'algorithme de la méthode de Newton pour f

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

or pour $f(x) = x^2 - a$, on a $f'(x) = 2x$, donc, pour $x_0 \in IR_+^*$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \end{aligned}$$

2) Soit $x_0 \in]0, c[$, on a

$$\begin{aligned} x_1 - c &= \frac{1}{2}x_0 + \frac{a}{2x_0} - c \\ &= \frac{1}{2x_0}\left(x_0^2 + a - 2x_0 c\right) \\ &= \frac{1}{2x_0}(x_0 - c)^2 \succ 0. \end{aligned}$$

3) Soit maintenant $x_0^2 \succ a$, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - c &= \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + a - 2x_n c\right) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - c)^2 \succ 0. \end{aligned}$$

car $x_n \succ 0$, $\forall n$ (par récurrence)

d'où $x_{n+1} \succ c$, $\forall n$
conclusion: $x_n^2 \succ a$, $\forall n$ car $c^2 = a$.
4) - Montrons que la suite $(x_n)_n$ est décroissante,

On a

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

1er cas: Si $x_0 \succ c$, alors $x_0^2 \succ a$ et $x_n^2 \succ a$ (d'apres 3))
donc,

$$1 + \frac{a}{x_n^2} \prec 2$$

d'où,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \prec x_n$$

$\Longrightarrow (x_n)_n$ est décroissante.

2ème cas: Si $x_0 \prec c$, alors $x_1 \succ c$ et donc on reviend au condition du premier cas ...

d'ou le résultat.

- Montrons maintenant que x_n est Convérgente.

On a $x_n^2 \succ a$, $\forall n \in IN^*$
donc $x_n \succ c$, $\forall n \in IN^*$

d'où la suite est minorée par c.

De plus on a $(x_n)_n$ décroissante, en déduit que
$(x_n)_n$ est Convérgente.

5) On a $(x_n)_n$ est Convérgente donc $(x_n)_n$ admet une limite.
Soit donc

$$l = \lim_{n \to +\infty} (x_n)$$

On a

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{2x_n}\left[(x_n - l)^2 + a - l^2\right]$$

On tendant n vers l'infini, on obtiend

$$a - l^2 = 0$$

conclusion: $l = \lim_{n \to +\infty} (x_n) = \sqrt{a} = c$.

Ex-4: (4p) On a $y\prime(t) = y(t) + t = f(t, y)$ avec $y(0) = 1$

L'intervalle d'intégration est $[0, 1]$. Remarquons tout d'abord que f étant continue et lipschitzienne par rapport à y le problème de Cauchy admet une solution unique.

Méthode d'Euler Elle s'écrit :
$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(t_n + y_n) = (1 + h)y_n + ht_n$
On a aussi $y(0) = y_0 = 1$, $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$, $t_0 = 0$ et $t_n = t_0 + nh = \frac{n}{10}$.
D'où l'approximation en t de $y(t)$, est
$y\,(1) = y_{10} = 3,1874$.

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — jeudi 16 février 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (7 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$$

On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$; f est un polynôme continu, $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ alors $f(0).f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[0, 1]$.
   D'autre part, $f'(x) = 4x(x^2+1) \geq 0$ sur $[0, 1]$ donc f est croissante et l'équation admet une et une seule solution $r \in [0, 1]$.
2. Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
   $r \in [0, 1]$ $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$ et $f(x_0) = f(0,5) = -0,44$ on a $f(0).f(0,5) > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$
   $r \in]0,5; 1[$ $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$ $f(0,75) = 0.44$ on a $f(0,5).f(0,75) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.
3. On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
   On a $f(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f(0,5) = -0,44 < 0$ alors que $f(0,75) = 0.44 > 0$ pour que la méthode converge il faut choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ donc : $x_0 = 0,75$.
   x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^2 - 1}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{4x_k^4 + 4x_k^2 - (x_k^4 + 2x_k^2 - 1)}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{3x_k^4 + 2x_k^2 + 1}{4x_k^3 + 4x_k}$$

$$x_1 = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0^3 + 4x_0} = 0,66$$

$$x_2 = \frac{3x_1^4 + 2x_1^2 + 1}{4x_1^3 + 4x_1} = 0,64$$

4. On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$;
   D'après la question 2) on a : $r \in]0.5, 0.75[$ on peut choisir $\overline{x}_0 = 0,5$ et $\overline{x}_1 = 0,75$
   On a :

$$\overline{x}_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \text{ avec } a_0 = \overline{x}_0 = 0,5 \text{ et } b_0 = \overline{x}_1 = 0,75$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_0 f(\overline{x}_1) - \overline{x}_1 f(\overline{x}_0)}{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)} = 0,625$$

On a $f(x_2) = -0,066$ avec $f(x_0)f(x_2) > 0$ donc la solution est dans $[x_2, x_1]$ et :

$$\overline{x}_3 = \frac{\overline{x}_2 f(\overline{x}_1) - \overline{x}_1 f(\overline{x}_2)}{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)} = 0,641$$

5. Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?
   On a :
$$|\overline{x}_3 - \overline{x}_2| = |0,641 - 0,625| = 0,016 < 0,1 = 10^{-1}$$
   Donc la précision est à 10^{-1} près.

Exercice 2 (7 POINTS) : L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 3$) pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$; (dite aussi méthode de Simpson $\frac{3}{8}$).

1. Expliquer pourquoi, sur l'intervalle $[-1, 1]$, il faut choisir les points -1, $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 ;
   On a : $h = \frac{1-(-1)}{3} = \frac{2}{3}$ $x_0 = -1$, $x_1 = -1 + \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$, $x_2 = -1 + 2\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $x_3 = -1 + 3\frac{2}{3} = 1$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant (en explicitant les calculs) :

i	0	1	2	3
x_i	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$L_i(x)$	$\frac{-1}{16}(9x^2-1)(x-1)$	$L_1(x)$	$\frac{-9}{16}(x^2-1)(3x+1)$	$L_3(x)$
ω_i	$\frac{1}{8}$	$\omega_1 = \frac{3}{8}$	$\omega_2 = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   Avec :
$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})} = \frac{9}{16}(3x-1)(x^2-1)$$
$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{-1}{3}+1)(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3})(\frac{-1}{3}-1)} = \frac{1}{16}(x+1)(9x^2-1)$$
$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)dx = \frac{9}{32}\int_{-1}^{1}(3x^3 - 3x - x^2 + 1)dx = \frac{3}{8}$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)dx = \frac{-9}{32}\int_{-1}^{1}(3x^3 + x^2 - 3x - 1)dx = \frac{3}{8}$$
3. Utiliser la méthode de Newton-cotes ($n = 3$) pour approcher $\int_{-1}^{1} f(t)dt$;
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = (1-(-1))\sum_{n=0}^{n=3}\omega_i f(x_i) = 2(\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3))$$
$$= 2(\frac{1}{8}f(-1) + \frac{3}{8}f(\frac{-1}{3}) + \frac{3}{8}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{8}f(1))$$
4. Peut-on améliorer la précision de cette méthode en utilisant le même nombre de points ? si oui **décrire la méthode sans faire les calculs** ;
   Nous pouvons utiliser l'une des deux méthodes :
   1) On détermine le polynôme de Tchebychev T_4 puis ses racines x_0,...,x_3 puis le polynôme P_3 d'interpolation de f par rapport aux x_i et finalement on calcule $\int_{-1}^{1} P_3(x)dx$ comme valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$
   2) On utilise la méthode de Gauss-Legendre.

5. Donner une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en utilisant la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$.
On a : $h = \frac{b-a}{3}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = a + 2h = \frac{a+2b}{3}$ et $x_3 = a + 3h = b$ comme les poids ω_i ne dépendent pas de l'intervalle choisi, on en déduit :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq (b-a)\left[\frac{1}{8}f(a) + \frac{3}{8}f(x_1) + \frac{3}{8}f(x_2) + \frac{1}{8}f(b)\right]$$

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC)\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
Par séparation des variables, nous avons :

$$y' = -10y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln(|y|) = -10t + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-10t} \Rightarrow y = ke^{-10t}$$

et comme $y(0) = y_0 = ke^0$ alors, la solution du (PC) est :

$$y(t) = y_0 e^{-10t}$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ; En intégrant l'équation, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale su deuxième membre, nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10((t_{n+1} - t_n)\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -10(h\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2})) = -5h(y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i) \simeq y_i$ on déduit :

$$y_{n+1} - y_n = -5h(y_{n+1} + y_n) \Rightarrow (1+5h)y_{n+1} = (1-5h)y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1-5h}{1+5h}y_n$$

3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$; On a :

$$y_{n+1} = \frac{1-5h}{1+5h}y_n = ry_n$$

si $h \neq \frac{1}{5}$ alors $r \neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r = \frac{1-5h}{1+5h}$.
En plus, h étant positif,

$$|1-5h| < |1| + |-5h| = 1 + 5h = |1+5h| \Rightarrow |r| = \frac{|1-5h|}{|1+5h|} < 1$$

4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

$$r = \frac{1-5h}{1+5h} \geq 0 \Rightarrow 1-5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \frac{1}{5}$ on a :

$$y_n = y_0 r^n = y_0 (\frac{1-5h}{1+5h})^n$$

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — jeudi 16 mars 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (8 POINTS) :

On souhaite trouver une valeur approchée de la racine de l'équation :

$$(E) \qquad \frac{e^{-x}}{x} = 1$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$

1. Montrer que r est solution de (E) si et seulement si $f(r) = 0$;
   D'abord remarquons que l'équation n'est pas définie pour $x = 0$ donc $r \neq 0$.
   $r \neq 0$ est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{e^{-r}}{r} = 0 \Leftrightarrow e^{-r} = r \Leftrightarrow f(r) = 0$

2. Montrer, en étudiant la fonction f, que l'équation $f(x) = 0$ admet **une et une seule solution** dans $\mathbb{R}$ et que cette solution se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$; On a : $f(x) = x - e^{-x}$ est une fonction continue et croissante car $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$. On a $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$

$f'(x)$	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	

   Donc l'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. D'autre part, on :

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 - e < 0$$

   Donc la solution r est localisée dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. En utilisant la méthode de Dichotomie, localiser r dans un intervalle d'amplitude 0.25 (on donne $e^{-0.5} \simeq 0.61$ et $e^{-0.75} \simeq 0.47$);
   $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $x_0 = 0,5$ et $f(x_0) = 0,5 - e^{-0,5} < 0$ car $e^{-0.5} > 0,5$ on a $f(a_0)f(x_0) > 0$
   Donc la solution r est dans l'intervalle $[0,5; 1]$ (d'amplitude $0,5$)
   $a_1 = 0,5$, $b_1 = 1$, $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$ et $f(0,75) = 0,75 - e^{-0,75} > 0$ car $e^{-0,75} < 0,75$ on a $f(a_1)f(x_1) < 0$
   Donc la solution r est dans l'intervalle $[0,5; 0,75]$ qui d'amplitude $0,25$ (l'algorithme se termine).

4. Montrer que f est **concave** sur $[0, 1]$ et en déduire le schéma de Newton permettant l'approximation de r solution de $f(x) = 0$ (**choisir** x_0 et donner l'expression de x_{k+1} en fonction de x_k);
   On a :

$$f''(x) = -e^{-x} < 0$$

   La fonction f est concave et commençant par vérifier les autres conditions de convergence de la méthode de Newton : $f'(x) > 0$, la fonction est continue et de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$. Nous devons choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ or $f(0,5) < 0$, il suffit de choisir $x_0 = 0,5$ pour que la méthode de Newton converge et on a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - e^{x_k}}{1+e^{-x_k}} = \frac{(1+x_k)e^{-x_k}}{1+e^{-x_k}} \\ x_0 = 0,5 \end{cases}$$

5. (x_n) est la suite de Newton définie précédemment, calculer x_1, x_2 et x_3 ; quel est le rang de l'erreur commise en considérant x_3 comme valeur approchée de r ?

$$x_0 = 0,5 \;\; x_1 = 0,566311 \;\; x_2 = 0,5671431 \;\; x_3 = 0,5671432$$

Utilisant l'incrément : $|x_3 - x_2| = 0,0000001$ est l'erreur est d'ordre 10^{-6}

Utilisant le résidu : $|f(x_3)| = 0,000000000000004$ est l'ordre est 10^{-16}

6. Peut-on utiliser la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de r ?

La méthode de Newton est elle même une méthode point fixe ! la réponse est oui !

Attention à la réponse : $x = e^{-x}$, Il faut d'abord vérifier que e^{-x} est contractante...

Exercice 2 (7 POINTS) :

Soit f une fonction de classe C^1 définie sur $[-1, 2]$ et $P_2(.)$ **le polynôme de Lagrange qui interpole f aux trois points** 0, 1 et 2.

1. Expliciter le polynôme $P_2(.)$ puis donner une approximation de $f(\frac{1}{2})$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. Peut-on exprimer de la même manière $f(-\frac{1}{2})$?

$$P_2(x) = f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x)$$
$$f(\frac{1}{2}) \sim P_2(\frac{1}{2})$$
$$f(-\frac{1}{2}) \;\; \text{non, car } \frac{-1}{2} \notin [0, 2]$$

2. En intégrant $P_2(.)$, donner une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$, expliquer pourquoi cette quadrature est exactement la méthode de Simpson ;

Trois points équidistants donc Newton-cotes $n = 2$ ou Simpson

3. Dans le but d'améliorer la quadrature précédente, **on souhaite utiliser** 5 **points au lieu de** 3. Préciser les 5 points en justifiant chaque choix ;

$$x_i = 0 + i(\frac{2-0}{4})$$

4. **Sans refaire les calculs d'interpolation**, donner une nouvelle quadrature pour approcher $\int_0^2 f(x)dx$ en appliquant la méthode de Simpson sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$;

Appliquer la méthode de Simpson sur chaque intervalle et additionner !

5. On suppose que $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$. Soit $P_3(.)$ le polynôme d'interpolation de f sur les 4 points -1, 0, 1 et 2. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que : $P_3(x) - P_2(x) = \lambda x(x-1)(x-2)$.

Exercice 3 (5 POINTS) : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par (avec $t > 0$) :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) - \frac{1}{1+t^2} y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. **On suppose que** (PC) **admet une solution unique**. Calculer cette solution (exacte) ;
   Séparation des variables
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la **méthode du rectangle à droite** pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{1+t^2} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
   $$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{h}{1+(n+1)^2h^2} y(t_{n+1}) \Rightarrow (1 - \frac{h}{1+(n+1)^2h^2}) y_{n+1} = y_n$$
3. On prend $h = 0.5$ calculer y_1, y_2 et y_3.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

——————CONTRÔLE ————mercredi 10 janvier 2018————2017 - 2018—

Présenter les valeurs approchées avec 4 chiffres après la virgule (par défaut).

Exercice 1 (8.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que la fonction f admet un zéro unique, noté r, dans $[0, 1]$;
   La fonction f est continue sur $[0, 1]$ (polynôme) et on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r \in [0, 1]$ tel que $f(r) = 0$. L'unicité provient du fait que f est strictement monotone, car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
2. **Sans vérifier les conditions de convergence**, écrire la **suite récurrente** $(x_n)_n$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton** pour approcher r. En prenant $x_0 = 1$ calculer x_1 et x_2 et x_3. Que peut-on constater ?
   $$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$
   On a :
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$
   Si $x_0 = 1$ alors $x_1 = 0,75$, $x_2 = 0,6860$, $x_3 = 0.6823$.
   On remarque que la différence entre x_2 et x_3 est de l'ordre 10^{-2} ou qu'elles sont identiques à deux chiffres après la virgule.
3. Appliquer en **trois itérations**, sur l'intervalle $[0, 1]$, la méthode de **dichotomie** et comparer la dernière valeur obtenue avec x_3 ;
   $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $\overline{x}_0 = 0.5$, $f(\overline{x}_0) = -0.375$
   $a_1 = 0,5$, $b_1 = 1$, $\overline{x}_1 = 0.75$, $f(\overline{x}_1) = 0,1718$
   $a_2 = 0,5$, $b_2 = 0.75$, $\overline{x}_2 = 0.625$, $f(\overline{x}_2) = -0,1308$
   $a_2 = 0,625$, $b_2 = 0.75$, $\overline{x}_3 = 0.6875$
   On remarque que la différence entre x_3 et $\overline{x}_3$ est de l'ordre 10^{-2} ou qu'elles sont identiques à deux chiffres après la virgule.
4. Déterminer le nombre d'itérations à exécuter pour obtenir une valeur approchée de r à 10^{-5} près ;
   L'erreur est majorée par : $M_n = \frac{1-0}{2^n}$, il suffit de considérer la plus petite valeur de n tel que :
   $$\frac{1-0}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow 2^{-n} \leq 10^{-10} \Rightarrow e^{-n\ln 2} \leq e^{-5\ln(10)} \Rightarrow n\ln 2 \geq 5\ln(10)$$
   $$n \geq \frac{5\ln(10)}{\ln 2} \simeq 16,6$$
   Il suffit d'exécuter 17 itérations.
5. Par la suite, on se propose de démontrer que la suite $(x_n)_n$ définie dans [2.] converge vers r :

a. Étudier sur $[0, +\infty[$ les variations de la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3rx^2 + 1 - r$ et déduire son signe;
On a : $h'(x) = 6x^2 - 6rx = 6x(x - r)$ de même signe que $(x - r)$ donc h est décroissante sur $[0, r]$ et croissante sur $[r, +\infty[$ et par conséquent, elle admet, au point r, une valeur minimale égale à $h(r) = 2r^3 - 3r^3 + 1 - r = -r^3 - r + 1 = -f(r) = 0$ et donc $h(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$.

b. On suppose que $x_0 \in [0, 1]$. Montrer par recurrence que $x_n \in [r, 1]$ pour tout $n \geq 1$; Premier terme :
On a :

$$x_1 - 1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} - 1 = \frac{2x_0^3 + 1 - (3x_0^2 + 1)}{3x_0^2 + 1} = \frac{x_0^2(2x_0 - 3)}{3x_0^2 + 1} \leq 0$$

$$x_1 - r = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} - r = \frac{2x_0^3 + 1 - r(3x_0^2 + 1)}{3x_0^2 + 1} = \frac{2x_0^3 - 3rx_0^2 - r + 1}{3x_0^2 + 1} = \frac{h(x_0)}{3x_0^2 + 1} \geq 0$$

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons qu'elle est vérifiée pour n et démontrons qu'elle reste vraie pour $n+1$. On $x_n \in [r, 1] \subset [0, 1]$ et :

$$x_{n+1} - 1 = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} - 1 = \frac{2x_n^3 + 1 - (3x_n^2 + 1)}{3x_n^2 + 1} = \frac{x_n^2(2x_n - 3)}{3x_n^2 + 1} \leq 0$$

$$x_{n+1} - r = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} - r = \frac{2x_n^3 + 1 - r(3x_n^2 + 1)}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 - 3rx_n^2 - r + 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{h(x_n)}{3x_n^2 + 1} \geq 0$$

Donc, par recurrence, $x_n \in [r, 1]$ pour tout $n \geq 1$.

c. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante et conclure.
On a $x_n \geq 0$ et :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} - x_n = \frac{2x_n^3 + 1 - 3x_n^3 - x_n}{3x_n^2 + 1} = \frac{-x_n^3 - x_n}{3x_n^2 + 1} = -\frac{x_n^3 + x_n}{3x_n^2 + 1} \leq 0$$

Finalement, $(x_n)_n$ est une suite décroissante minorée par r et par conséquent, elle est convergente (vers r l'unique zéro de f).

Exercice 2 (5 POINTS) :

Soit (P_C) le problème de Cauchy donné par : $(P_C) \quad \begin{cases} y'(t) = -y(t) + e^t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

1. Montrer que (P_C) admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte); L'équation s'écrit : $y'(t) = -y(t) + e^t = f(t, y(t))$ avec $f(t, y) = -y + e^t$. On a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |-y_1 + e^t - (-y_2 + e^t)| = |-y_1 + y_2| = |y_1 - y_2|$$

$f(t, y)$ est Lipschitizienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une unique solution.
L'équation sans second membre :

$$y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -dt \Rightarrow y_{ESSM} = ke^{-t}$$

Solution particulière de l'équation avec second membre (variation de la constante) :

$$k'e^{-t} - ke^{-t} = -ke-t + e^t \Rightarrow k'e^{-t} = e^t \Rightarrow k' = e^{2t} \Rightarrow k = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^{2t}e^{-t} = \frac{1}{2}e^t$$

et :

$$y_G = ke^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Or :

$$y(0) = y_0 \Rightarrow k + \frac{1}{2} = y_0 \Rightarrow k = y_0 - \frac{1}{2}$$

La solution du (P_C) est donnée par :

$$y_G = (y_0 - \frac{1}{2})e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, on intègre l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode de trapèze pour approcher l'intégrale sur $[t_n,\ t_{n+1}]$ du second membre ;
Donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n (en fonction de y_n, n et h).

On a :

$$y'(t) = -y(t) + e^t = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-y(t) + e^t)dt$$

On obtient (en utilisant la méthode du trapèze pour le second membre) :

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-y(t) + e^t)dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2}(-y(t_{n+1}) + e^{t_{n+1}} - y(t_n) + e^{t_n} = \frac{h}{2}(e^{t_{n+1}} + e^{t_n} - y(t_{n+1}) - y(t_n$$

cette égalité s'écrit (en prenant $y(t_i) = y_i$ et $t_i = ih$) :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(e^{(n+1)h} + e^{nh} - y_{n+1} - y_n) \Rightarrow (1 + \frac{h}{2})y_{n+1} = (1 - \frac{h}{2})y_n + \frac{h}{2}(e^{(n+1)h} + e^{nh})$$

Donc :

$$(1 + \frac{h}{2})y_{n+1} = (1 - \frac{h}{2})y_n + \frac{h}{2}(1 + e^h)e^{nh}$$

La question demande l'utilisation de la méthode du trapèze pour le second membre $(-y(t) + e^t)$.
La réponse qui utilise la méthode du trapèze juste pour l'intégrale de $-y(t)$ et le calcul de la valeur exacte de l'intégrale de e^t est aussi acceptée.

Exercice 3 (6.5 POINTS) :

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ que l'on suppose assez régulière. On souhaite calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode de trapèze composite.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{b-a}{m}$ et $x_i = a + ih$ et $\widetilde{I}(m, f)$ la valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ donnée par la méthode du trapèze **composite** (ou la **méthode des m trapèzes**).

1. Cas $m = 1$

a. Donner le polynôme $P_1(x)$ interpolant f en $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, formuler l'erreur d'interpolation $e_f(x) = |f(x) - P_1(x)|$ en fonction de a, b, x et f'' et donner une majoration de $e_f(x)$ pour $x \in [a, b]$;

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$E_f(x) = |f(x) - P_1(x)| = |(x-a)(x-b)\frac{f''(\xi)}{2}|$$

On a $x - a \geq 0$, $x - b \leq 0$ et on pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, donc :

$$E_f(x) \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

b. En intégrant $P_1(x)$, montrer que $\widetilde{I}(1, f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$;

On a :

$$I \simeq \widetilde{I}(1, f) = \int_a^b P_1(x)dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx$$

$$\widetilde{I}(1, f) = \frac{f(a)}{2(a-b)}\left[(x-b)^2\right]_a^b + \frac{f(b)}{2(b-a)}\left[(x-a)^2\right]_a^b$$

$$\widetilde{I}(1, f) = \frac{-f(a)}{2(a-b)}(a-b)^2 + \frac{f(b)}{2(b-a)}(b-a)^2 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

c. On donne $\int_a^b (b-x)(x-a)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$, déduire une bonne majoration de $E_{1,f} = \left|I - \widetilde{I}(1, f)\right|$.

On a :

$$E_{1,f} = \left|I - \widetilde{I}(1, f)\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - P_1(x))dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - P_1(x)|dx$$

Donc :

$$E_{1,f} \leq \int_a^b \frac{M}{2}(x-a)(b-x)dx = \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M}{2}\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{12}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

2. On suppose maintenant que $m > 1$:

a. En utilisant le résultat établi en [1.], sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, donner l'expression de $\widetilde{I}(m, f)$;

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + ... + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

En remarquant que $x_{i+1} - x_i = h$, on a :

$$\widetilde{I}(m, f) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + ... + \frac{h}{2}(f(x_{m-1} - x_m) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

D'ou :

$$\widetilde{I}(m, f) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_m)) + h\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)$$

b. En utilisant le résultat établi en [1.], donner une majoration de l'erreur $E_{m,f} = \left|I - \widetilde{I}(m,f)\right|$;
Soit $P_1^i(x)$ le polynôme d'interpolation de f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, en remarquant que : $\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)| \leq M = \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, on a :

$$E_{m,f} = \left|I - \widetilde{I}(m,f)\right| = \left|\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1^i(x)dx\right|$$

Donc :

$$E_{m,f} \leq \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|f(x) - P_1^i(x)\right|dx \leq \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(h)^3}{12}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Soit :

$$E_{m,f} \leq m \times \frac{(h)^3}{12}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)| = m\frac{(\frac{b-a}{m})^3}{12}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12m^2}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

3. Application : $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Calculer $\widetilde{I}(1,f)$ et $\widetilde{I}(2,f)$.
$m = 1$ et $h = 1 - 0 = 1$:

$$\widetilde{I}(1,f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

$m = 2$, $h = \frac{1}{2}$:

$$\widetilde{I}(2,f) = \frac{1}{4}(f(0) + f(1)) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{31}{40}$$

Remarquons que la valeur exacte est donnée par :

$$I = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Question facultative (+1 POINT) :

Soit f un polynôme de degré n, $(x_i)_{i=0,\dots,m}$ une famille de points distincts et $P_m(x)$ le polynôme d'interpolation de f par rapport aux points $(x_i)_{i=0,\dots,m}$, montrer que si $m \geq n$ alors $P_m(x) = f(x)$.

On a :

$$P_m(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,...,m \Rightarrow (P_m - f)(x_i) = 0 \quad i = 0,...,m$$

Or, P_m est un polynôme de degré m et f est un polynôme de degré n et comme $m \geq n$ alors $(P_m - f)$ est un polynome de degré m ayant $m+1$ racines (les x_i qui sont distincts) alors $P_m - f$ est le polynôme identiquement nul. Donc :

$$(P_m - f)(x) = 0 \Rightarrow P_m(x) = f(x)$$

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

–RATTRAPAGE ——— *mercredi 14 février 2018* ———2017 - 2018——

Présenter les valeurs approchées ***avec 4 chiffres après la virgule*** *(par défaut)*

Calculatrices non programmables autorisées (mais l'échange est interdit)

Documents et téléphones portables interdits

Exercice 1 (9 POINTS) :

Soit (E) l'équation donnée par : $(E) \qquad 10x = 9e^{-x}$

On donne : $e^{-0.5} = 0.6065 \qquad e^{-0.625} = 0.5352 \qquad e^{-0.75} = 0.4723 \qquad e^{-1} = 0.3678$

1. En utilisant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x - 9e^{-x}$, montrer que (E) admet **une seule solution**, notée x^*, dans l'intervalle $[0, 1]$;

$$(E) \qquad 10x = 9e^{-x} \Leftrightarrow 10x - 9e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

On a : f est continue (sur $\mathbb{R}$), $f'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0$ et $f(0) = -9 < 0$ et $f(1) = 10 - 9e^{-1} \simeq 6,6898 > 0$, donc : l'équation $f(x) = 0$ et par conséquent (E) admet une seule solution.

2. Appliquer la méthode de **dichotomie** pour localiser la solution x^* dans un intervalle $[a, b]$ d'amplitude : $b - a = 0,125$ puis donner une valeur approchée de x^* et une majoration de l'erreur ;

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $x_0 = 0.5$, $|1 - 0| = 1$, $f(x_0) \simeq -0,4585 < 0$

$a_1 = 0.5$, $b_1 = 1$, $x_1 = 0.75$, $|1 - 0.5| = 0.5$, $f(x_1) \simeq 3,2493 > 0$

$a_2 = 0.5$, $b_2 = 0.75$, $x_2 = 0.625$, $|0.75 - 0.5| = 0.25$, $f(x_2) \simeq 1,4332 > 0$

$a_3 = 0.5$, $b_3 = 0.625$, $x_3 = 0.5625$, $|0.625 - 0.5| = 0.125$. Fin

Donc la solution est dans l'intervalle $[0.5, 0.625]$, une valeur approchée de la solution est donnée par $x_3 = 0,5625$ et une majoration de l'erreur est donnée par $|x_3 - x^*| \leq |b_3 - a_3| = 0.125$.

3. Écrire la **suite récurrente** $(x_n)_n$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton** pour approcher x^*. Choisir une bonne valeur initiale x_0 (parmi les deux valeurs, a et b, trouvées dans la question (2.)), vérifier **les conditions de convergence** et calculer x_1 ;

La méthode de Newton est donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{10x_n - 9e^{-x_n}}{10+9e^{-x_n}} = \frac{9(x_n+1)e^{-x_n}}{10+9e^{-x_n}} \\ x_0 \quad \text{bien choisie} \end{cases}$$

f est de classe $\mathbb{C}^2$, $f'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0$, $f''(x) = -9e^{-x} < 0$, $f(0.5) < 0$ et $f(0.625) > 0$ donc les conditions suffisantes de convergence sont vérifiées en choisissant $x_0 = 0.5$.

$$x_1 = \frac{9(x_0 + 1)9e^{-x_0}}{10 + 9e^{-x_0}} = \frac{9(0.5 + 1)e^{-0.5}}{10 + 9e^{-0.5}} = 0.5296$$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$:

   a. Vérifier que x^* en **un point fixe** de g ;

   x^* est solution de (E) donc : $10x^* = 9e^{-x^*} \Leftrightarrow x^* = \frac{9}{10}e^{-x^*} = g(x^*)$ et on en déduit que x^* est un point fixe de g.

b. Vérifier que $g([0,1]) \subset [0,1]$ et, en s'assurant que $|g'(x)| = g(x)$, déterminer $L = \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$;
On a : $g'(x) = -\frac{9}{10}e^{-x} < 0$ donc g est strictement décroissante et :

$$g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [\frac{9}{10}e^{-1}, \frac{9}{10}] \subset [0,1]$$

car $\frac{9}{10}e^{-1} > 0$ et $\frac{9}{10} < 1$. D'autre part, on a :

$$|g'(x)| = |-\frac{9}{10}e^{-x}| = |\frac{9}{10}e^{-x}| = \frac{9}{10}e^{-x} = g(x) \Rightarrow L = \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} g(x) = \frac{9}{10}$$

car g est décroissante sur $[0,1]$ et $g(0) = \frac{9}{10}$.

c. Soit $(\overline{x}_n)_n$ la suite définie par **la méthode du point fixe** sur $[0,1]$. Montrer que $|\overline{x}_n - x^*| \leq L^n$ et déduire que la suite $(\overline{x})_n$ converge vers la solution de (E) ; g est suffisamment régulière, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [0,1]$ tel que pour x_1 et x_2 dans $[0,1]$:

$$|g(x_2) - g(x_1)| = g'(c)|x_2 - x_1| \leq \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)||x_2 - x_1| = \frac{9}{10}|x_2 - x_1|$$

donc g est contractante ($k = 0.9$) ce que implique que la méthode du point fixe converge, en plus :

$$|\overline{x}_n - x^*| = |g(\overline{x}_{n-1}) - g(x^*)| \leq 0.9|x_{n-1} - x^*| = 0.9|g(\overline{x}_{n-2}) - g(x^*)| \leq (0.9)^2|\overline{x}_{n-2} - x^*| = ...$$

On continue le raisonnement par recurrence pour obtenir :

$$0 \leq |\overline{x}_n - x^*| \leq (0.9)^n|\overline{x}_0 - x^*| \leq (0.9)^n$$

car : $\overline{x}_0$ et x^* sont dans $[0,1]$ et $|\overline{x}_0 - x^*| \leq |1-0| = 1$. On en déduit :

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} |\overline{x}_n - x^*| \leq \lim_{n\to+\infty} (0.9)^n = 0$$

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} |\overline{x}_n - x^*| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n = x^*$.

5. Combien faut-il calculer de termes, de la suite $(\overline{x})_n$, pour obtenir une valeur approchée à 10^{-10} près (ici, on ne demande pas de calculer cette valeur approchée !).
Il suffit de prendre :

$$|\overline{x}_n - x^*| \leq (0.9)^n \leq 10^{-10} \Rightarrow e^{n\ln(0.9)} \leq e^{-10\ln(10)} \Rightarrow n \geq \frac{-10\ln(10)}{\ln(0.9)} = 218.54$$

Au moins 219 termes !

6. Quelle est la meilleur méthode ? Justifier.
Les trois méthodes sont convergentes mais seule la méthode de Newton est d'ordre 2, les deux autres méthodes sont d'ordre 1. On peut dire que la meilleure méthode pour cette équation est la méthode de Newton.

Exercice 2 (6 POINTS) :

Soit f une fonction suffisamment régulière définie sur $[0,4]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer **le polynôme d'interpolation** de degré 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ aux points : 0, 3 et 4 puis donner une majoration de l'erreur $E(x) = |f(x) - P_2(x)|$;
Les polynomes de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(0-3)(0-4)} = \frac{1}{12}(x^2 - 7x + 12)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)}{(3-0)(3-4)} = \frac{-1}{3}(x^2-4x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(4-0)(4-3)} = \frac{1}{4}(x^2-3x)$$

Donc :

$$P_2(x) = \frac{f(0)}{12}(x^2-7x+12) - \frac{f(3)}{3}(x^2-4x) + \frac{f(4)}{4}(x^2-3x)$$

D'autre part, il existe ξ dans $[0,4]$ tel que :

$$E(x) = |f(x) - P_2(x)| = |x(x-3)(x-4)\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}| \leq \frac{1}{6}|x(x-3)(x-4)| \sup_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)|$$

2. En remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0,4]$ par l'intégrale de $P_2(.)$ sur le même intervalle, déterminer **la méthode de quadrature élémentaire** obtenue puis donner une majoration de l'erreur $I = |\int_0^4 f(x)dx - \int_0^4 P_2(x)dx|$ (on donne : $\int_0^4 |x(x-3)(x-4)|dx = \frac{71}{6}$);

$$\int_0^4 f(x)dx \simeq \int_0^4 P_2(x)dx = \frac{f(0)}{12}\int_0^4 (x^2-7x+12)dx - \frac{f(3)}{3}\int_0^4 (x^2-4x)dx + \frac{f(4)}{4}\int_0^4 (x^2-3x)dx$$

On a :

$$\int_0^4 (x^2-7x+12)dx = \frac{35}{3}$$

$$\int_0^4 (x^2-4x)dx = \frac{-32}{3}$$

$$\int_0^4 (x^2-3x)dx = \frac{-8}{3}$$

donc :

$$\int_0^4 f(x)dx \simeq \frac{35}{36}f(0) + \frac{32}{9}f(3) - \frac{8}{12}f(4)$$

L'erreur :

$$I = |\int_0^4 f(x)dx - \int_0^4 P_2(x)dx| \leq \int_0^4 |f(x)-P_2(x)|dx = \int_0^4 E(x)dx \leq \int_0^4 \frac{1}{6}|x(x-3)(x-4)| \sup_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)|$$

$$I \leq \frac{1}{6}\sup_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)| \int_0^4 |x(x-3)(x-4)|dx \leq \frac{1}{6}\sup_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)| \frac{71}{6} = \frac{71}{36}\sup_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)|$$

3. Déterminer **l'ordre** de cette quadrature;

L'ordre minimal est 2 (degré de P_2), vérifiant si la quadrature est exacte pour x^3 :

$$\int_0^4 x^3 dx = 64 \qquad \text{et} \qquad \frac{35}{36}0^3 + \frac{32}{9}3^3 - \frac{8}{12}4^3 = \frac{160}{3} \neq 64$$

Donc, la quadrature est d'ordre 2.

4. Rappeler la définition de la méthode **de Simpson (simple)** et évaluer $I = \int_0^4 f(x)dx$ en utilisant cette Méthode. Expliquer pourquoi cette quadrature est différente de celle obtenue dans la question (2.);
La méthode de Simpson est donnée par :
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$
donc :
$$\int_0^4 f(x)dx \simeq \frac{4}{6}\left(f(0) + 4f(2) + f(4)\right)$$
Les deux méthodes sont bien différentes car la première quadrature n'est pas de Newton-cotes car les points ne sont pas équidistants : $4-3 = 1 \neq 3 = 3-0$.
5. En utilisant **deux sous intervalles**, évaluer $I = \int_0^4 f(x)dx$ avec la méthode de **Simpson composite**.
$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$$
$$\int_0^4 f(x)dx \simeq \frac{2}{6}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right) + \frac{2}{6}\left(f(2) + 4f(3) + f(4)\right) = \frac{2}{6}\left(f(0) + f(4) + 2f(2) + 4(f(1) + f(3))\right)$$
Nous pouvons aussi utiliser la définition de la méthode composite !

Exercice 3 (5 POINTS) :

Soit (P) le problème de Cauchy donné par : $(P) \quad \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que (P) admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte);
(P) est un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 - 2y$ et on a :
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 - 2y_1 - (1 - 2y_2)| = |-2(y_1 - y_2)| = 2|y_1 - y_2|$$
Donc f est 2-Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème admet une solution unique.
ESSM : $y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2t}$ Solution particulière (variation de la constante) :
$k'e^{-2t} - 2ke^{-2t} = 1 - 2ke^{-2t} \Rightarrow k' = \frac{1}{e^{-2t}} \Rightarrow k' = e^{2t} \Rightarrow k = \frac{e^{2t}}{2} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}$
La solution générale est donnée par :
$y = ke^{-2t} + \frac{1}{2}$ et $y(0) = k + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$
Finalement, la solution du problème est donnée par :
$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
   a. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant **la méthode du point milieu**;
$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt = (t_{n+2} - t_n)y(\frac{t_{n+2} + t_n}{2}) = 2hy(t_{n+1})$$
   b. **Intégrer** l'équation différentielle, du problème, entre t_n et t_{n+2} et déduire, en utilisant le résultat de la question (2.a.), une relation entre y_{n+2}, y_{n+1} et y_n (et en fonction de h);
$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+2}} (1 - 2y(t))dt = \int_{t_n}^{t_{n+2}} dt - 2\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$$

$$y(t_{n+2}) - y(t_n) = 2h - 4hy(t_{n+1})$$

Donc :

$$y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h$$

c. Proposer une expression permettant de calculer y_1 et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de (P)).
On utilise la méthode d'Euler progressive :

$$y_1 = y_0 + hf(t, y_0) = y_0 + h(1 - 2y_0) = 1 + h(1 - 2) = 1 - h$$

Donc le schéma est donné par :

$$\begin{cases} y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h \\ y_1 = 1 - h \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Année universitaire 2018-2019

Examen

Solution

Exercice 1

a) On constate que φ_1 ne vérifie pas la condition $\varphi_1([1,2]) \subset [1,2]$ car $\varphi_1(1) = 0 \notin [1,2]$.

b) $\varphi(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$ on vérifie que φ vérifie les condition du théorème fixe :

• φ est contractante. Il suffit de vérifier que $\sup\limits_{[1,1]} |\varphi'| < 1$

$$\text{or } \varphi'(x) = \frac{1}{3} 3(3x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{(3+1)^{\frac{2}{3}}} \leq 0.4$$

• $\varphi([1,2]) \subset [1,2]$. puisque $\varphi'(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}} > 0$ on a φ est strictement croissante donc

$$\varphi([1,2]) = [\varphi(1), \varphi(2)] = [1.587, 1.912] \subset [1,2]$$

En conclusion la fonction φ vérifie les hypothèses du théorème du point fixe, donc toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a \in [1,2]$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n), (n \geq 0)$ converge vers r).

c) Puisque φ est croissant et si $\varphi(x_0) \geq x_0$ la suite serait croisante, en effet $\varphi(x_0) = x_1 \geq x_0$, par recurrence on suppose $x_n \geq x_{n-1}$ puis applique φ qui est croissante donc conserve l'inégalité $x_{n+1} = \varphi(x_n) \geq \varphi(x_{n-1}) = x_n$ ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De même si $\varphi(x_0) \leq x_0$ la suite serait décroisante, en effet $\varphi(x_0) = x_1 \geq x_0$ puis en supposant $x_n \leq x_{n-1}$ et comme Précédemment on a $x_{n+1} \leq x_n$ donc la suite est décroissante.

Les deux cas peuvent se produire en effet :

$$\text{si } x_0 = 1 \text{ on a } \varphi(x_0) \geq x_0 \text{ de même si } x_0 = 2 \text{ on a } \varphi(x_0) \leq x_0$$

d)
$x_0 = 1$
$x_1 = (3+1)^{\frac{1}{3}} = 1.587\,4$
$x_2 = (3 * 1.587\,4 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1.792\,8$
$x_3 = (3 * 1.792\,8 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1.854\,5$
$x_4 = (3 * 1.854\,5 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1.872\,3$
$x_5 = (3 * 1.872\,3 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1.877\,4$

On déduit que x_4 est bien une approximation de r avec deux dicimaux exacts car $x_5 - x_4 = 0.005\,1$.

e) La méthode décrite dans cet exercice pour trouver une approximation de r est recommandable car elle permet d'approcher la valeur de r in dependament du choix de x_0 dans $[1,2]$, de plus elle est d'ordre 1; puisque

$$|x_{n+1} - r| = |\varphi(x_n) - \varphi(r)| = |x_n - r|\,|\varphi'(c)| \leq 0.4\,|x_n - r|$$

de plus on a $|x_n - r| \leq (0.4)^n |x_0 - r|$

Exercice 2 Soit f une fonction de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$

1) on utilise la métode de Lgrange$\frac{-2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-\frac{2}{3})}{\frac{-2}{3}(\frac{-2}{3}-\frac{2}{3})} = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})} = 1 - \frac{9}{4}x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+\frac{2}{3})(x)}{(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})(\frac{2}{3})} = \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right) + f(0)\left(1 - \frac{9}{4}x^2\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}x\right)$$

2) On calcule $\int_{-1}^{+1} P_2(x)dx$

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x)dx = f\left(\frac{-2}{3}\right)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right)dx + f(0)\int_{-1}^{+1}\left(1 - \frac{9}{4}x^2\right)dx +$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}x\right)dx$$
$$= 0.75f\left(\frac{-2}{3}\right) + 0.5f(0) + 0.75f\left(\frac{2}{3}\right)$$

3) On sait d'aprés le cours que cette méthode de quadrature est au moins d'ordre 2 vérifions qu'elle est d'ordre 3

$$\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 = 0.75\left(\frac{-2}{3}\right)^3 + 0.5*(0) + 0.75\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

et

$$\int_{-1}^{+1} x^4 dx = 0.4 \neq 0.75\left(\frac{-2}{3}\right)^4 + 0.5*(0) + 0.75\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.29630$$

ce qui permet d'affirmer que l'ordre est bien 3.

Exercice 3 $y'(t) = -(y(t))^m + \cos(t)$,

1) la fonction associée à ce problème est $f(t,y) = \cos(t) + y^m$, on a

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^m - y_2^m| = \left|m\,(y_1 - y_2)\,\theta^{m-1}\right|$ où θ est compris entre y_1 et y_2

puisque m est impaire $m-1 \geq 0$ donc, pour $y_1,\ y_2$ appartenant à un borné on a $|m\theta^{m-1}| \leq K$ une conclusion on a

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K\,|(y_1 - y_2)|$ pour $y_1,\ y_2$ $\in$Borné $\Rightarrow$Le problème $(P3)$ admet une solution locale unique.

2) $h > 0$, $t_n = nh$ on intégre l'éqution sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} y^m(t)dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \cos(t)dt =$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} -y^m(t)dt + \sin(t_{n+1}) - \sin(t_n)$$

La méthode du rectantle à droite nous permet de remplacer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y^m(t)dt$ par $hy^m(t_{n+1})$ et $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \cos(t)dt$ soit par $h\cos(t_{n+1})$ soit par $\sin(t_{n+1}) - \sin(t_n)$

On cherche alors la solution numérique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution du système

$$y_{n+1} - y_n = -hy_{n+1}^m + \sin(t_{n+1}) - \sin(t_n) \quad \text{ou}$$
$$y_{n+1} - y_n = -hy_{n+1}^m + h\cos(t_{n+1})$$

Ce schéma est imlicite, car pour avoir y_{n+1} on doit résoudre l'équation non linéaire

$$y_{n+1} + hy_{n+1}^m = y_n + \sin(t_{n+1}) - \sin(t_n), \quad \text{ou} \quad y_{n+1} + hy_{n+1}^m = y_n + h\cos(t_{n+1})$$

3) Pour résoudre cette dernière équation on utilise la méthode de newton appliquée à la fonction

$$f(x) = x + hx^m - y_n - \sin(t_{n+1}) + \sin(t_n) \text{ ou } f(x) = x + hx^m - y_n - h\cos(t_{n+1})$$

On note que y_{n+1} sera un zéro de cette fonction f, en partant avec $x_0 = y_n$ et en utilisant un seul *pas* dans la la méthode de newton où x_1 serait une approximation de y_{n+1}.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f\,'(x) = 1 + mhx^{m-1}$$

On a

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n + hy_n^m - y_n - \sin(t_{n+1}) + \sin(t_n)}{1 + mhy_n^{m-1}} =$$
$$y_n - \frac{hy_n^m - \sin(t_{n+1}) + \sin(t_n)}{1 + m(1+h)y_n^{m-1}}$$

ou bien

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n + hy_n^m - y_n - h\cos(t_{n+1})}{1 + mhy_n^{m-1}} = y_n - h\frac{y_n^n - \cos(t_{n+1})}{1 + mhy_n^{m-1}}$$

Année universitaire 2018-2019

Rattrapage

Pour la suite on utilise la valeur de k trouvée à la question 2). Soit $h > 0$ un pas de temps, soit $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la solution numérique obtenue à l'aide du schém d'Euler explicite.

Etablir la relation entre u_{n+1} et u_n

4) On fixe $h = 1$, caluler $y(t_n)$ et u_n pour $n = 1, ..., 4$ et remplisser le tableau

n	1	2	3	4
$y(t_n)$				
u_n				

Correction

Exercice 1.

a)

$$f(x) = x^5 - 7x + 4$$

$$\begin{cases} f \text{ est une fonction continue} \\ f(0) = 4 > 0 \\ f(1) = -2 < 0 \end{cases}$$

grâce au théorème des valeurs intermédiaires la fonction admet au moins une racine dans $[0, 1]$.

De plus la dérivée $f'(x) = 5x^4 - 7 < 0$ sur $[0, 1]$ donc la fonction est strictement décroissante ce prove la rcine de f dans $[0, 1]$ est unique, on la note alors r.

b) la méthode de Newton définit une suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ dont la formule est donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ étant fixé} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

c) Il est légitime d'utiliser la méthode de Newton car $f'(x)$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

d) Pour assurer la convergence de la méthode de Newton on doit choisir x_0 tel que $f(x_0)$ et f' soient de même signe.

comme $f' < 0$ sur $[0, 1]$ et $f(0) < 0$ on peut choisir $x_0 = 0$

e) Soit x_n un élément de la suite défine par la formule de Newton, alors les trois décimaux de x_n sont ceux de r si

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-3}$$

f)

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0	4	
1	0.571 43	6.0918×10^{-2}	3.4286
2	0.580 85	1.6804×10^{-4}	0.009 42
3	0.580 88	-2.4884×10^{-5}	0.000 03

D'après ce tableau, on constate que les quatre décimaux de x_2 sont ceux de r.

Exercice 2

1) Ici $m = 2$ donc le polynôme d'interpolation p est de degré 2, en utilsant la méthode de Lagrange on a:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$
$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1 - x^2$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

D'où $\quad p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) f(-1) + \left(1 - x^2\right) f(0) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) f(1)$

2)

$$FQ(f) = \int_{-1}^{+1} p(x)dx =$$
$$f(-1)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx + f(0)\int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)dx + f(1)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx$$
$$FQ(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

On retouve la formule de **Cavalieri-Simpson** sur l'intevalle $[-1, 1]$.

3) D'prés le cours on sait que cette formule admet au moins une précision d'ordre 2, vérifions pour 3 et plus

$$\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0, \text{ et } FQ(x^3) = 0$$
$$\int_{-1}^{+1} x^4 dx = 0.4 \text{ et } FQ(x^4) = \frac{2}{3} \neq 0.4$$

On conclut que $FQ(f)$ a bien une précision d'ordre 3.

4) 0n utilise le changement de variable $t = \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}s + \frac{x_{2i+2} + x_{2i}}{2}$, $\; dt = \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}ds = hds$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(t)dt = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}s + \frac{x_{2i+2} + x_{2i}}{2}\right)hds = \int_{-1}^{+1} g(s)ds$$

où

$$g(s) = f\left(\frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}s + \frac{x_{2i+2} + x_{2i}}{2}\right)h$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} g(s)ds \approx \frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1)$$
$$\approx \frac{1}{3}f(x_{2i})h + \frac{4}{3}f\left(\frac{x_{2i+2} + x_{2i}}{2}\right)h + \frac{1}{3}f(x_{2i+2})h$$
$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(t)dt \approx \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f\left(x_{2i+1}\right) + f(x_{2i+2})\right).$$

5)

$$\int_a^b f(t)dt. = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(t)dt \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_{2i}) + 4f\left(x_{2i+1}\right) + f(x_{2i+2})\right)$$

Exercice 3. 1) Puisque l'équation est **linéair** on cherche la solution générale de l'ESSM $y'(t) = -ky(t)$, dont la solution est $y_1(t) = c\exp(-kt)$, $(c \in \mathbb{R})$,une solution particulière de l'EASM est $y_2(t) = 25$, d'où la solution

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = c\exp(-kt) + 25$$

2) comme $y(0) = 75$ on a $c + 25 = 75 \Rightarrow c = 50$

$$\Rightarrow y(t) = 50\exp(-kt) + 25$$

En teant compte de la condition $y(5) = 50 = 50\exp(-5k) + 25$ on a

$$\exp(-5k) = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\log(2)}{5} \Rightarrow y(t) = 50\exp(-\frac{\log(2)}{5}t) + 25$$

3) Soit $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ u_n une approximation de $y(t_n)$, y vérifie l'équation

$$y'(t) = -\frac{\log(2)}{5}(y(t) - 25)$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie en appliquant la formule de rectangle à gauche pour l'intégrale, c'est à dire on remplace

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(-\frac{\log(2)}{5}(y(t) - 25)\right)dt \text{ par}$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(-\frac{\log(2)}{5}(y(t_n) - 25)\right) = -h\frac{\log(2)}{5}(y(t_n) - 25)$$

On obtient la relation

$$u_0 = 75 \text{ et } u_{n+1} = u_n - h\frac{\log(2)}{5}(u_n - 25) = \left(1 - h\frac{\log(2)}{5}\right)u_n + 5h\log(2)$$

4) Pour $h = 1$, on a $u_n = \left(1 - \frac{\log(2)}{5}\right)u_{n-1} + 5\log(2)$ et $y(t_n) = 50\exp(-\frac{\log(2)}{5}n) + 25$ on a :

n	1	2	3	4
$y(t_n)$	68.528	62.893	57.988	53.717
u_n	68.069	62.098	56.955	52.525

Année universitaire 2019-2020

Examen

Correction

Exercice 1.

1) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [0,1] \\ f(0) = -\dfrac{1}{4},\ f(1) = 1 - \dfrac{1}{4}\cos(1) > 0 \end{array}\right. \Rightarrow f$ admet au moins une racine r dans $[0,1]$

De plus $f\,'(x) = 1 + \sin(x) > 0$ sur $[0,1] \Rightarrow f$ est strictement croissante et donc r est unique.

2) On utilise le tableau

$k =$	$a_k =$	$c_k =$	$b_k =$	$f(c_k)$	$\lvert c_k - r\rvert \leq$
0	0	0.5	1	0.2806044	$1/2$
1	0	0.25	0.5	0.0077719	$1/2^2$
2	0	0.125	0.25	-0.1230494	$1/2^3$
3	0.125	0.1875	0.25	-0.0581183	$1/2^4$

Pour avoir $|c_m - r| \leq 10^{-5}$ il suffit que m verifie $\dfrac{1}{2^{m+1}} \leq 10^{-5} \Rightarrow m \geq \dfrac{5\log(10)}{\log(2)} - 1.$

4) on utilise le tableau

$k =$	$y_k =$	$f(y_k)$
0	1	0.8649244
1	0.2854036	0.0455166
2	0.2428801	0.0002178
3	0.2426747	$5.119D - 09$
4	0.2426747	0

5) $g(u) = \dfrac{1}{4}cos(u)$. On vérifie que $g([0,1]) \subset [0,1]$ et g est contractante

♣ $g'(u) = -\dfrac{1}{4}\sin(u) < 0$ sur $[0,1] \Rightarrow g([0,1]) = [g(1), g(0)] = \left[\dfrac{1}{4}\cos(1), \dfrac{1}{4}\right] \subset [0,1]$

♣ $|g'| < \dfrac{1}{4} \Rightarrow g$ est contractante

donc g vérifie les hypothèses du téorèma de point fixe, par la suit, pour tout $u_0 \in [0,1]$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{k+1} = g(u_k)$ est bien définie et converge vers le point fixe de g à savoir $r = g(r)$ qui est la racine de f.

6) La convergence est indépendante du choix de u_0 dans $[0,1]$.

$$|u_{k+1} - r| = |g(u_k) - g(r)| \leq \frac{1}{4}|u_k - r| \leq ..... \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} |u_0 - r|$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |u_{k+1} - r| = 0$$

Exercice 2

1) On utilise les fonctions $g_i(x) = x^i, \quad i = 0,\ 1, ...$

$i = 0,\ g_0 = 1,\ \int_{-1}^{1} 1dx = 2$, on pose $\quad w_1 + w_2 + w_3 = 2$

$i = 1,\ g_1 = x,\ \int_{-1}^{1} xdx = 0$, on pose $\quad -\alpha w_1 + \alpha w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = w_3$

$i = 2,\ g_2 = x^2,\ \int_{-1}^{1} x^2dx = 2/3$, on pose $\quad \alpha^2 w_1 + \alpha^2 w_3 = 2/3 \Rightarrow \alpha^2 w_1 = 1/3$

$i = 3,\ g_3 = x^3,\ \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$, on pose $\quad -\alpha^3 w_1 + \alpha^3 w_3 = 0$ ne donne rien

$i = 4,\ g_4 = x^4,\ \int_{-1}^{1} x^4dx = 2/5$, on pose $\quad \alpha^4 w_1 + \alpha^4 w_3 = 2/5 \Rightarrow \alpha^4 w_1 = 1/5$

Avec $w_1 = w_3$, les équations

$$2w_1 + w_2 = 2 \quad , \ \alpha^2 w_1 = 1/3 \quad , \alpha^4 w_1 = 1/5$$

permettent de déterminer α et w_i

$$\frac{\alpha^4 w_1}{\alpha^2 w_1} = \alpha^2 = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \sqrt{3/5} \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow w_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow Fq(g) = \frac{5}{9}g(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\sqrt{3/5})$$

Avec ce choix cette formule de quadrature est au moins d'ordre 4, vérifions les ordres superieurs.

$i = 5,\ \int_{-1}^{1} x^5dx = 0$ et $Fq(x^5) = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{3/5}\right)^5 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{3/5}\right)^5 = 0$

$i = 6,\ \int_{-1}^{1} x^6dx = 2/7$ et $Fq(x^6) = \frac{10}{9}\left(\sqrt{3/5}\right)^6 = \frac{10}{9}(3/5)^3 = \frac{3 \times 2}{25} = \frac{6}{25} \neq \frac{2}{7}$

Conclusion $Fq(g)$ est exaxte à l'ordre 5.

2) pour appliquer la formule de quadrature précedante à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$,on effectue le changement de variables

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = \frac{h}{2}t + a + ih + \frac{h}{2},$$
$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + a + ih + \frac{h}{2})\frac{h}{2}dt = \int_{-1}^{1} g_i(t)dt$$
$$Fq(f, [x_i, x_{i+1}]) = \frac{5}{9}g_i(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}g_i(0) + \frac{5}{9}g_i(\sqrt{3/5})$$
$$= \tfrac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}\tfrac{h}{2} + a + ih + \tfrac{h}{2})\frac{h}{2} + \tfrac{8}{9}f(a + ih + \tfrac{h}{2})\tfrac{h}{2} + \tfrac{5}{9}f(\sqrt{3/5}\tfrac{h}{2} + a + ih + \tfrac{h}{2})\tfrac{h}{2}$$
$$= \left(\frac{5}{9}f\left(a + \tfrac{2i+1-\sqrt{3/5}}{2}h\right) + \frac{8}{9}f(a + \tfrac{2i+1}{2}h) + \frac{5}{9}f\left(a + \tfrac{2i+1+\sqrt{3/5}}{2}h\right)\right)\frac{h}{2}$$

3) formule de quadrature de f sur $[a, b]$

$$Fq(f, [a, b]) = \tfrac{5}{9}\tfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f\left(a + \tfrac{2i+1-\sqrt{3/5}}{2}h\right) + f\left(a + \tfrac{2i+1+\sqrt{3/5}}{2}h\right)\right) + \tfrac{8}{9}\tfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1} f(a + \tfrac{2i+1}{2}h)$$

4) Algorithme
On implémenteles données
$a,\ b, f$
$h = \frac{b-a}{m},\ m \in \mathbb{N}$
$I = 0$
$for \quad i = 0 : m-1$
$I = I + \left(\frac{5}{9} f \left(a + \frac{2i+1-\sqrt{3/5}}{2} h \right) + \frac{8}{9} f (a + \frac{2i+1}{2} h) + \frac{5}{9} f \left(a + \frac{2i+1+\sqrt{3/5}}{2} h \right) \right) \frac{h}{2}$
$fin.$

Exercice 3 $y'(t) + \sin(y(t))$

1) Dans cette équation différentielle le second membre $f(t, y(t)) = -\sin(y)$, donc elle est continue et pour $t \geq 0$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq |\sin(y_1) - \sin(y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, donc le problème de cauchy admet une solution unique.

2) $h = 1/N$, on pose $t_n = nh$, on intégre l'équation sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sin(y(t)) dt$$

pour approcher $-\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sin(y(t)) dt$ on utilise la formule de rectangle à gauche

$$Fq(f, [t_n, t_{n+1}]) = -(t_{n+1} - t_n) \sin(y(t_n) = -h \sin(y(t_n)$$

on cherche alors $(y_n)_{n=0,\ldots,N}$ par le système

$$y_{n+1} - y_n = -h \sin(y(t_n) \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n - h \sin(y(t_n))$$

3) on déduit immediatement que $|y_{n+1}| \leq |y_n| + h$

Année universitaire 2019-2020

Rattrapage

Correction

Exercice 1 $f(x) = 5x^5 - 9x + 10 \Rightarrow f\ '(x) = 25x^4 - 9 \Rightarrow f'$ s'annule en $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ et $+\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$
\begin{array}{|c||ccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -\sqrt{\frac{3}{5}} & & \sqrt{\frac{3}{5}} & & +\infty \\
\hline
f' & & + & 0 & - & 0 & + & \\
 & & & 15.57 & & & & +\infty \\
f & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & -\infty & & & & 4.4229 & & \\
\hline
\end{array}
\qquad (2pts)
$$

On constate que pour $x \geq -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $f(x) > 0$ c'est à dire que f ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty\right[$. par contre sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$ la fonction est continue et **strictement** croissante et elle passe de valeurs négatives en valeurs positives donc elle admet un zéro unique sur cet intervalle. $(1pt)$

2) on a $f''(x) = 100x^3 < 0$ sur $[-1.4\ ,\ -1]$ et $f(-1.4) = -4.291 < 0$ d'où la suite

$$
\begin{cases}
x_0 = -1.4 \\
x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}
\end{cases}
\qquad (0.5)
$$

Le résultat du calcul sur le tableau

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1.4	-4.2912
1	-1.3506985	-0.3219447
2	-1.3463602	-0.0023115
3	-1.3463286	-0.0000001

(1.5pt)

3) Estimation de $|x_{k+1} - r|$

$$x_{k+1} - r = x_k - r - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - r + \frac{f(r) - f(x_k)}{f'(x_k)}$$

or

$$f(r) - f(x_k) = (r - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(r - x_k)^2 f''(\theta)$$

θ étant compris entre r et x_k

$$\Rightarrow x_{k+1} - r = \frac{1}{2}(r - x_k)^2 \frac{f''(\theta)}{f'(x_k)} \qquad (1\text{pt})$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - r| = (r - x_k)^2 \frac{|f''(\theta)|}{|f'(x_k)|} \leq C\,|x_n - r|^2$$

où

$$C = \frac{1}{2}\frac{\sup\limits_{[-1.4,-1]}|f''|}{\inf\limits_{[-1.4,-1]}|f'|} = \frac{1}{2}\frac{|f''(-1.4)|}{f(-1)} \leq \frac{1}{2}\frac{275}{16} \leq 9 \qquad (0.5)$$

La méthode de Newton converge donc avec ordre 2.

4) On vérifie facilement que r est un point fixe de φ, en effet

$$\frac{5}{9}(r^5+2) = r \Leftrightarrow 5r^5+10 = 9r \Leftrightarrow 5r^5 - 9r + 10 = f(r) = 0 \qquad (0.5)$$

5) on ne peut pas applique la méthode du point fixe car φ ne vérifie pas l'un des hypothèses du théorème de point fixe, à savoir $\varphi([-1.4,-1]) \subset [-1.4,-1]$ car

$$\varphi(-1.4) = -1.8768 \notin [-1.4,-1] \qquad \text{(1pt)}$$

Exercice 2

$$Fq(g) = \frac{4}{3}g\left(-\frac{w}{2}\right) + \frac{2}{3}g(w)$$

1) l'ordre de précision N est détérminé par $\int_{-1}^{1} x^n dx = \frac{4}{3}\left(-\frac{w}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(w)^n$, pour $0 \leq n \leq N$ et que la relation n'est pas vérifiée pour $N+1$

i) $n=0$, $\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ la relation est vérifiée sans condition $(0.5pt)$

ii) $n=1$, $\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{4}{3}\frac{w}{2} + \frac{2}{3}w = 0$ la relation est vérifiée sans condition $(0.5pt)$

iii) $n=2$, $\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\left(-\frac{w}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}(w)^2 = w^2$ la relation est vérifiée avec la condition $w = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et la formule de quadrature s'écrit $(0.5pt)$

$$Fq(g) = \frac{4}{3}g\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad (0.5pt)$$

cette formule a au moins un ordre de précision 2.

iv) vérifions pour $n=3$

$$Fq(x^3) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 = \int_{-1}^{1} x^3dx$$

Conclusion avec $w = \sqrt{\frac{2}{3}}$ la formule de quadrature est précise à l'ordre 2. $(1pt)$

2) On posse $x = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}t + \frac{x_{i+1}+x_i}{2} = \frac{h}{2}t + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$, $dx = \frac{h}{2}dt$ (0.5)
on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{h}{2}t + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\frac{h}{2}dt \qquad (0.5)$$

On pose $g(t) = \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{2}t + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ d'où la formule de quadrature

$$Fq(f,[x_i,x_{i+1}]) = Fq(g) = \frac{4}{3}g\left(-\frac{w}{2}\right) + \frac{2}{3}g(w)$$

$$= \frac{4}{3}\frac{h}{2}f\left(-\frac{h}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + \frac{2}{3}\frac{h}{2}f\left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \quad \text{(1pt)}$$

3) Formule de quadrature composite de f sur $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx. = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}\left(2f\left(-\frac{h}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}\left(2f\left(-\frac{h}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{h}{2} + ih\right) + f\left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{h}{2} + ih\right)\right). \quad \text{(1pt)}$$

4) Algorithme
[a = une valeur
b = une valeur
m = un entier
h=$\frac{b-a}{m}$] (0.5*pt*)
[$Fq = 0$
pour i allant de 0 à $m-1$, faire
$Fq = Fq + \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}\left(2f\left(-\frac{h}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{h}{2} + ih\right) + f\left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{h}{2} + ih\right)\right)$
Fin] (0.5*pt*)

Exercice 3

1) On a une équation différentielle avec second membre $f(t,y) = K(y-L)$.

$$\begin{cases} f(t,y) \text{ est continue} \\ |f(t,y_2) - f(t,y_2)| = K|y_1 - y_2|, \quad \text{donc } f \text{ est lipschitzienne} \end{cases} \qquad (0.5pt)$$

d'où le problème $(P3)$ admet une solution globale unique.

Résolution

ESSM : $y'(t) = Ky(t)$ dont la solution est $y_g(t) = B\exp(Kt)$, $B \in \mathbb{R}$
Solution particulière $y_p = L$
$\Rightarrow y(t) = B\exp(Kt) + L$
avec $y(0) = y_0$ on a $y(t) = (y_0 - L)\exp(Kt) + L$ (1*pt*)
2) On intégre l'équation entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} K(y(t) - L)dt \qquad (0.5pt)$$

On utilise la méthode de rectangle à droite pour approcher l'intégrale par $\triangle tK(y(t_{n+1}) - L)$, (0.5pt)

par la suite on cherche $(y_n)_{n=1,\ldots,}$ solution du système

$$y_{n+1} - y_n = \triangle tK(y_{n+1} - L) \Leftrightarrow (1 - \triangle tK)y_{n+1} = y_n - \triangle tKL \qquad (0.5)$$

3) Si $L = 0$ le schéma devient $(1-\triangle tK)y_{n+1} = y_n$, par récurrence on déduit

$$y_n = \frac{1}{(1 - \triangle tK)^n} y_0 \qquad (0.5)$$

Comme $K < 0$ on a $(1 - \triangle tK) > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(1 - \triangle tK)^n} y_0 = 0.$ (0.5)

$$y(t_n) = y_0 \exp(Kt_n) \ ; \ y_n = \frac{1}{(1 - \triangle tK)^n} y_0$$

$$\Rightarrow y_n - y(t_n) = \left(\frac{1}{(1 - \triangle tK)^n} - \exp(Kn\triangle t) \right) y_0 \qquad (1pt)$$

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 28 février 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation suivante : (E) $x^3 - 3 = e^{-x}$

Notons : $f(x) = x^3 - e^{-x} - 3$ **et** $g(x) = \sqrt[3]{e^{-x} + 3}$. **Si** $1 \leq x \leq 2$ **alors :** $f''(x) > 0$
et $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2)$ avec $g'(1) \simeq -0.05$ et $g'(2) \simeq -0.02$

1. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, r_0, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [1, 2]$;

   La fonction f est continue (somme de deux fonctions continues) et nous avons : $f(1) = -2 - e^{-1} = -2.3678 < 0$ et $f(2) = 5 - e^{-2} \simeq 4.8646 > 0$ donc $f(1)f(2) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1, 2]$. D'autre part, $f'(x) = 3x^2 + e^{-x} > 0$, la fonction f est monotone et le théorème de la bijection montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[1, 2]$.
   Finalement, (E) $x^3 - 3 = e^{-x} \Longleftrightarrow x^3 - e^{-x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$ d'ou le résultat.

2. Appliquer **deux itérations** de la méthode de **Dichotomie**, **localiser** la racine r_0 dans un intervalle $[a_2, b_2]$ puis donner une **majoration de l'erreur** $|x_2 - r_0|$. Déterminer le **nombre d'itérations**, k, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_k, avec une **précision** $\varepsilon = 2^{-10}$?

   $[a_0, b_0] = [1, 2]$ $x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$ $f(x_0) = f(1.5) = 0.1518$
   $[a_1, b_1] = [1, 1.5]$ $x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$ $f(x_1) = f(1.25) = -1.3333$
   $[a_2, b_2] = [1.25, 1.5]$ $x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$
   $r_0 \in [1.25, 1.5]$ et nous avons : $|x_2 - r_0| \leq |b_2 - a_2| = 0.25$ ou $|x_2 - r_0| \leq \frac{2-1}{2^2} = 0.25$
   Nous avons : $|x_k - r_0| \leq \frac{2-1}{2^k}$ pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir k vérifiant :

   $$\frac{1}{2^k} \leq 2^{-10} \Longrightarrow 2^{-k} \leq 2^{-10} \Longrightarrow k \geq 10$$

   Il suffit d'exécuter 10 itérations pour obtenir la précision ε.

3. Soit $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**. Écrire l'**algorithme** de la méthode (avec une précision $\varepsilon = 2^{-10}$), justifier un **bon choix** de $y_0 \in [a_2, b_2]$ et étudier la **convergence** de cette méthode. Exécuter les **deux premières itérations** ;

   Algorithme :
   y_0 valeur initiale bien choisie

Tant que $|f(y_n)| > 2^{-10}$ faire :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = y_n - \frac{y_n^3 - e^{-y_n} - 3}{3y_n^2 + e^{-y_n}} = \frac{2y_n^3 + (y_n+1)e^{-y_n} + 3}{3y_n^2 + e^{-y_n}}$$

Nous avons $f''(x) > 0$ pour assurer l'une des conditions de convergence, il faut choisir $y_0 \in [1.25, 1.5]$ avec $f(y_0) > 0$ nous pouvons choisir $y_0 = 1.5$

Nous avons : f est de classe $\mathcal{C}^2$ (polynôme et exponentielle)
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$ et $f''(x)f(1.5) > 0$
Les conditions suffisantes de convergence sont vérifiées et $y_n \longrightarrow r_0$.

$y_0 = 1.5$ et $y_1 = \frac{2y_0^3+(y_0+1)e^{-y_0}+3}{3y_0^2+e^{-y_0}} = 1.4782$ et $y_2 = \frac{2y_1^3+(y_1+1)e^{-y_1}+3}{3y_1^2+e^{-y_1}} = 1.4779$

4. Soit $(\theta_n)_n$ la suite définie par : $\theta_n = g(\theta_{n-1})$ et $\theta_0 \in [1, 2]$.
Vérifier que r_0 est un **point fixe** de g et **montrer** que $(\theta_n)_n$ **converge** vers r_0. Préciser le nombre d'itérations qu'il faut exécuter pour obtenir une précision $\varepsilon = 2^{-10}$.

r_0 est solution de (E) donc (rappelons que $r_0 \in [1, 2]$)) :

$$r_0^3 - 3 = e^{-r_0} \Longrightarrow r_0^3 = e^{-r_0} + 3 > 0 \Longrightarrow r_0 = \sqrt[3]{e^{-r_0} + 3} = g(r_0)$$

donc r_0 est point fixe de g.
D'après les données, $g'(x) < 0$ sur $[1, 2]$, $g(1) = \sqrt[3]{e^{-1} + 3} \simeq 1.9477 < 2$ et $g(2) = \sqrt[3]{e^{-2} + 3} \simeq 1.3956 > 1$
Donc : $g([1, 2]) = [g(2), g(1)] \subset [1, 2]$
D'autre part : $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2) \Longrightarrow |g'(x)| \leq \max(|g'(1)|, |g'(2)|) = |g'(1)|$
$\Longrightarrow \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)| \leq L = |g'(1)| \in]0, 1[$
On en déduit que g est contractante de rapport L et par conséquent, les condition de convergence de la méthode de point fixe sont vérifiées et on a :

$$|\theta_n - r_0| = |g(\theta_{n-1} - g(r_0)| \leq L|\theta_{n-1} - r_0|$$

Par induction ou par récurrence, nous obtenons :

$$|\theta_n - r_0| \leq L^n |\theta_0 - r_0| \leq L^n$$

car θ_0 et r_0 sont dans $[1, 2]$
On en déduit, finalement, que la suite $(\theta_n)_n$ converge vers r_0.
Pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir n tel que :

$$L^n \leq 2^{-10} \Longrightarrow n \ln(L) \leq -10 \ln(2) \Longrightarrow n \geq -10 \frac{\ln(2)}{\ln(L)} \simeq 2.3137$$

IL faut au moins trois itérations.

Exercice 2 (2+2+2+2+2=10 POINTS) : L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 2$).

1. **Cas particulier :** l'Intervalle $[-1, 1]$. Recopier et compléter le tableau suivant (détailler les calculs) ; $h = \frac{1-(-1)}{2} = 1$ $x_i = -1 + ih$
$x_0 = -1$ $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2$$
$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$
$$\int_{-1}^{1} L_0(x)dx = [\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} L_1(x)dx = [x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} L_2(x)dx = [\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$L_i(x)$	$\frac{x^2-x}{2}$	$1 - x^2$	$\frac{x^2+x}{2}$
$\int_{-1}^{1} L_i(x)dx$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. Formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2. Puis, utiliser $P_2(x)$ pour déterminer une **approximation**, avec une **quadrature** $\widetilde{I}_{[-1,1]}$, de l'intégrale $I_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$;

$$P_2(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x)$$
$$\widetilde{I}_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} P_2(x)dx = f(-1)\int_{-1}^{1} L_1(x)dx + f(0)\int_{-1}^{1} L_1(x)dx + f(1)\int_{-1}^{1} L_2(x)dx$$
$$\widetilde{I}_{[-1,1]} = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = 2\left(\frac{f(-1)}{6} + \frac{4f(0)}{6} + \frac{f(1)}{6}\right)$$

3. On note $M_0 = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)|$. Exprimer l'**erreur d'interpolation** $E_2(x) = |f(x) - P_2(x)|$ et donner une **majoration** de cette erreur. En déduire une majoration de l'**erreur d'intégration** $E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}|$ (on donne $\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{1}{2}$) ;
Il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que :

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \frac{1}{3}|(x+1)(x-0)(x-1)||f^(3)(\xi)|$$
$$E_2(x) \leq \frac{1}{3}|x^3 - x| \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = \frac{M_0}{3}|x^3 - x|$$

et

$$E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}| = |\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} P_2(x)dx| = |\int_{-1}^{1}(f(x) - P_2(x))dx|$$
$$E_{[-1,1]} \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - P_2(x)|dx \leq \frac{M_0}{3}\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{M_0}{6}$$

4. **Cas général** : l'intervalle $[a, b]$. Utiliser un changement, de variables, **affine** et montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

On pose :

$$x = mt + p$$

on a : $a = -m + p$ et $b = m + p$ donc : $p = \frac{a+b}{2}$ et $m = \frac{b-a}{2}$

Finalement : $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ et $dx = \frac{b-a}{2}dt$ et :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \underbrace{f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})}_{g(t)} dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(2(\frac{g(-1)}{6} + \frac{4g(0)}{6} + \frac{g(1)}{6})\right)$$

$g(-1) = f(a)$ $g(0) = f(\frac{a+b}{2})$ et $g(1) = f(b)$ et par conséquent :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

5. On se donne une **discrétisation uniforme** de l'intervalle $[a, b]$ (4 sous-intervalles, avec le pas $h = \frac{b-a}{4}$). Donner une approximation $\widetilde{I}^4_{[a,b]}$ de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant une **méthode composite** de la quadrature précédente.

$x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., 4$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \simeq \frac{x_2 - x_0}{6}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{x_4 - x_2}{6}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

QS (**Question supplémentaire : +1.5 Points**) Un **problème de Cauchy** (PC) est défini par une équation différentielle $y' = h(t, y)$ et une condition initiale $y(x_0) = y_0$ (On suppose que (PC) admet exactement une solution). **Intégrer** l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ puis utiliser la **quadrature précédente** et l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+2}, y_{i+1} et y_i. Transformer cette relation en une **méthode explicite** permettant le calcul d'une solution approchée de ce problème.

Voir support du cours

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — 04 avril 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (0.75+1.25+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation donnée par $f(x) = 0$ avec f, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$.

1. L'équation (E) admet-elle **une solution** dans l'intervalle $[-1, 1]$?
   f est continue (Polynôme), $f(-1) = -6$ et $f(1) = 2$ donc l'équation (E) admet (au moins) une solution.
2. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [0, 1]$;
   f est continue, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$ et f est croissante (car $f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 > 0$) donc l'équation (E) admet une et une seule solution, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[0, 1]$
3. **Localiser** la racine $\overline{x}$ dans un intervalle $[c, d]$ d'amplitude $d - c = 0.25$. Déterminer le **nombre d'itérations**, p, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_p, avec une **précision** $\varepsilon = 10^{-6}$?
   $\overline{x} \in [0, 1]$, $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5$, $f(0.5) = \frac{-9}{8} < 0$ et $f(0)f(0.5) > 0$ donc $\overline{x} \in [0.5, 1]$ et $1 - 0.5 = 0.5$
   $\overline{x} \in [0.5, 1]$, $x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$, $f(0.75) = \frac{15}{64} > 0$, $f(0.5)f(0.75) < 0$ donc $\overline{x} \in [0.5, 0.75]$ et $0.75 - 0.5 = 0.25$
   Nous avons : $|x_p - \overline{x_0}| \leq \frac{1-0}{2^p}$ pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir p vérifiant :
   $$\frac{1}{2^p} \leq 10^{-6} \Longrightarrow 2^{-p} \leq 10^{-6} \Longrightarrow \ln(2^{-p}) \leq \ln(10^{-6}) \Longrightarrow p \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} = 19,93$$
   Il suffit d'exécuter 20 itérations pour obtenir la précision ε.

4. Montrer, en utilisant la méthode de Newton, que **l'algorithme** (Alg) permet de définir une suite $(z_n)_n$ d'approximations de $\overline{x}$:
   $$(Alg)\begin{cases} z_0 = 1 \\ \text{Tant que } |f(z_n)| > 10^{-5} \text{ Faire :} \\ z_{n+1} = \frac{2z_n^3+z_n^2+3}{3z_n^2+2z_n+3} \\ \text{Fin} \end{cases}$$
   Identifier **la précision** recherchée et étudier **la convergence** de cette méthode. Calculer z_1 et z_2 ; La méthode de Newton est définie par : z_0 bien choisie et
   $$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = z_n - \frac{z_n^3 + z_n^2 + 3z_n - 3}{3z_n^2 + 2z_n + 3} = \frac{z_n(3z_n^2 + 2z_n + 3) - (z_n^3 + z_n^2 + 3z_n - 3)}{3z_n^2 + 2z_n + 3}$$
   $$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + z_n^2 + 3}{3z_n^2 + 2z_n + 3}$$
   Si les conditions de convergence sont vérifiées, les termes z_n constituent des approximations de $\overline{x}$, l'algorithme propose de faire les calculs pour obtenir une précision $\varepsilon = 10^{-5}$.

Nous avons : f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 > 0$ sur $[0, 1]$, $f''(x) = 6x^2 > 0$ sur $[0, 1]$ et $f(z_0) = f(1) = 2 > 0$ et de même signe que $f''(x)$ on en déduit que les conditions de convergence sont vérifiées et par conséquent, la suite z_n converge vers $\overline{x}$.
$z_1 = \frac{2z_0^3+z_0^2+3}{3z_0^2+2z_0+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$ et $z_2 = \frac{2z_1^3+z_1^2+3}{3z_1^2+2z_1+3} = 0.7121$

5. Transformer l'équation (E) en un problème de point fixe, de la forme $h(x) = x$, tel que h est une fonction rationnelle à déterminer (de la forme $\frac{\text{constante}}{\text{polynôme de degré 2}}$).
Soit $(t_n)_n$ la suite définie par : $t_0 = 0.5$ et $t_n = h(t_{n-1})$. Calculer t_1 et t_2.
Est ce que la suite $(t_n)_n$ est **convergente** ? Si oui, déterminer sa limite.
On donne :
$$(*) \quad -0.5 \leq \frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2} \leq -0.3 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1]$$
$$(E) \Rightarrow x(x^2 + x + 3) = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{x^2 + x + 3} \to x = h(x)$$
donc $\overline{x_0}$ est solution du problème du point fixe $h(x) = x$ avec $h(x) = \frac{3}{x^2+x+3}$
$$t_1 = h(t_0) = h(0.5) = 0.8 \;\; t_2 = h(t_1) = h(0.8) = 0.6756$$
h est continue, $h'(x) = \frac{-3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2} < 0$ (d'après $(*)$).
$h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [\frac{3}{5}, 1] \subset [0, 1]$ et $|h'(x)| = |\frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2}| \leq 0.5$ donc h est contractante de rapport $L = 0.5$
$$|t_n - x_0| = |h(t_{n-1}) - h(x_0)| \leq 0.5|t_{n-1} - x_0| = 0.5|h(t_{n-2}) - h(x_0)|$$
donc :
$$|t_n - x_0| \leq 0.5^2|t_{n-2} - x_0|$$
et ainsi de suite, par induction, jusqu'au trouver (notons que $|t_0 - x_0| \leq 1$).
$$0 \leq |t_n - x_0| \leq (0.5)^n|t_0 - x_0| \leq (0.5)^n$$
Comme $(0.5)^n$ converge vers 0 (suite géométrique de raison inférieure à 1), on déduit que $|t_n - x_0|$ converge aussi vers 0 et par conséquent, la suite $(t_n)_n$ converge vers x_0.

Exercice 2 (2+3+2=7 POINTS) : Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

1. Déterminer les **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ et formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2.
$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x^2 - 3x}{-2} = \frac{3x - x^2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x^2-x}{6}$$
$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$
$$P_2(x) = f(0)\frac{x^2-4x+3}{3} + f(1)\frac{3x-x^2}{2} + f(3)\frac{x^2-x}{6}$$

2. Calculer $\int_0^3 L_i(x)dx,\ i = 0,1,2$, puis utiliser le polynôme d'interpolation, $P_2(x)$, pour déterminer une **quadrature** $Q = 3\sum_{i=0}^{i=3}\omega_i f(x_i)$, de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Quel est l'ordre de Q ?

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \frac{x^2-4x+3}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x]_0^3 = 0$$
$$\int_0^3 L_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 3x - x^2dx = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^3 = \frac{9}{4}$$
$$\int_0^3 L_2(x)dx = \frac{1}{6}\int_0^3 x^2 - xdx = \frac{1}{6}[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_0^3 = \frac{3}{4}$$
$$I = \int_0^3 f(x)dx \simeq \int_0^3 P_2(x)dx = f(0)\int_0^3 L_0(x)dx + f(1)\int_0^3 L_1(x)dx + f(3)\int_0^3 L_2(x)dx$$
$$Q = 3\left(\frac{3}{4}f(1) + \frac{1}{4}f(3)\right)$$

3. Utiliser la **méthode de Simpson** pour donner une deuxième **quadrature** $\widetilde{I}$ permettant, aussi, d'approcher l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Comparer Q et $\widetilde{I}$ et expliquer les différences.

$$\widetilde{I} = (3-0)\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f(\frac{0+3}{2}) + \frac{1}{6}f(3)\right) = 3\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f(1.5) + \frac{1}{6}f(3)\right)$$

Les deux quadratures sont bien différentes (points et poids) même si, à la base, on utilise trois points ! Les différences peuvent s'expliquer par la répartition des points : D'une part, une discrétisation uniforme de l'intervalle (0, 1.5 et 3) et d'autre part une répartition non uniforme de points (0, 1 et 3).

Exercice 3 (1+2=3 POINTS) :

1. Rappeler la formule de quadrature approchant l'intégrale $\int_c^d g(t)dt$ par la méthode **du trapèze** puis l'appliquer dans le cas $g(t) = F(t, y(t))$;

$$\int_c^d g(t)dt \simeq \frac{d-c}{2}\left(g(c) + g(d)\right)$$
$$\int_c^d F(t,y(t))dt \simeq \frac{d-c}{2}\left(F(c,y(c)) + F(d,y(d))\right)$$

2. On suppose que le problème de Cauchy, (P), admet une solution unique :

$$(P)\ \begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Intégrer l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ puis utiliser **la méthode du Trapèze** et, pour tout indice j, l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+1} et y_i.

$$y' = F(t, y(t)) \Longrightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, y(t))dt$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \left(F(t_i, y(t_i)) + F(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right)$$

Et en utilisant l'approximation, nous avons :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(t_i, y_i) + F(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

QS. (+1 point) Transformer la relation précédente en **une méthode explicite**.

La relation précédente est implicite pour la transformer, nous pouvons remplacer y_{i+1} dans le second membre par une formulation adéquate, par exemple nous pouvons utiliser le schéma d'Euler explicite :

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_i, y_i)$$

et donc :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(t_i, y_i) + F(t_{i+1}, y_i + hF(t_i, y_i)))$$

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 17 janvier 2022 — 2021 - 2022

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+1.5=3.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$

1. En utilisant la **méthode de Newton**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f, noté P, sur la base des points : -2, -1 et 1. Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(0)$.

$$\begin{array}{cccc}
x_i & f(x_i) & DD1 & DD2 \\
-2 & -8 & & \\
-1 & -1 & \frac{-1-(-8)}{-1-(-2)} = 7 & \\
1 & 1 & \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1 & \frac{1-7}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2
\end{array}$$

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$N_2(x) = (x+2)(x-(-1)) = x^2 + 3x + 2$$

Donc :

$$P(x) = -8 + 7(x+2) - 2(x^2 + 3x + 2) = -2x^2 + x + 2$$

$$f(0) \simeq P(0) = 2$$

2. Calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = 0$ puis utiliser la formule du cours. Comparer et Expliquer.

$$E(0) = |f(0) - P(0)| = |0 - 2| = 2$$

Formule du cours :

$$E(x) \leq \frac{1}{3!}|(x+2)(x+1)(x-1)| \sup_{x\in[-2;1]} |f^{(3)}(x)| = |(x+2)(x+1)(x-1)| \quad \text{avec} f^{(3)}(x) = 6$$

$$E(0) \leq 2$$

La formule donne une majoration de l'erreur, pour $x = 0$ l'erreur exacte est égale à 2 majorée aussi par 2. Ce résultat n'est pas vraie pour toutes les valeurs x

Exercice 2 (2+3+3.5+3.5=12 POINTS) :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad \ln(1+x) = 1 - x^2$

1. Étudier, sur l'intervalle $[0;2]$, les **variations** de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1+x)$. En déduire que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée x^*, dans l'intervalle $[0;2]$;
   $(E) \iff f(x) = 0$
   f est continue sur son domaine (somme d'un polynôme et de la fonction ln)
   f est derivable sur son domaine $f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x} = \frac{2x^2+2x+1}{1+x} > 0$ car $x \geq 0$.
   f est strictement croissante sur $[0;2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 3 + \ln(3) > 0$.
   Donc l'equation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $x^* \in [0;2]$ qui est l'unique solution de (E).
2. Appliquer la méthode de **Dichotomie** pour **localiser** la solution x^* dans un intervalle $[a;b]$ d'**amplitude** $A = b - a = 0.5$. Déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour pouvoir localiser la solution dans un intervalle d'amplitude $A = 0.0625$;
   On a $x^* \in [0;2]$ d'amplitude $A = 2 - 0 = 2$ et $c = \frac{0+2}{2} = 1$, $f(1) = \ln(2) > 0$
   On a $f(0)f(1) < 0$ donc $x^* \in [0;1]$
   $x^* \in [0;1]$ d'amplitude $A = 1 - 0 = 1$, $c = \frac{0+1}{2} = 0.5$ et $f(0.5) = -0.3445 < 0$
   On a $f(0)f(0.5) > 0$ donc $x^* \in [0.5;1]$
   $x^* \in [0.5;1]$ d'amplitude $A = 1 - 0.5 = 0.5$.
   Après n itérations, la solution est dans un intervalle d'amplitude $\frac{2-0}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.0625$ Donc : $2^{n-1} = \frac{1}{0.0625} = 16 = 2^4$ donc $n - 1 = 4$ et $n = 5$
3. On note $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**.
   a) Écrire l'**algorithme**, de cette méthode, permettant d'obtenir une **précision** d'au moins 10^{-6} ;
   Une valeur initiale y_0 bien choisie
   Tant que $|f(y_n)| > 10^{-6}$ (ou $|y_n - y_{n-1}| > 10^{-6}$) Faire :
   $$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$
   Nous pouvons développer l'expression (mais ce n'est pas nécessaire).
   $$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^2 - 1 + \ln(1+y_n)}{2y_n + \frac{1}{1+y_n}} = \frac{y_n^3 + y_n^2 + 2y_n + 1 - (1+y_n)\ln(1+y_n)}{2y_n^2 + 2y_n + 1}$$
   b) Justifier un **bon choix** de l'intervalle initial et de la **valeur initiale** y_0 puis calculer y_1 ;
   On a $x^* \in [0;2]$ mais dans la question précédente, la solution est localisée dans l'intervalle $[0.5;1]$ qui est le meilleur choix pour initialiser la méthode de Newton.
   L'une des conditions de convergence de cette méthode est que $f(y_0)$ et $f''(x)$ ont le même signe. On a :
   $$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{1+x} \qquad f''(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1} > 0$$
   et comme $f(0.5) < 0$ et $f(1) > 1$, nous pouvons choisir $y_0 = 1$
   c) Étudier la **convergence** de cette méthode et expliquer pourquoi on peut la considérer comme la meilleure méthode ?
   Vérifions les conditions de convergence :

$x^2 - 1$ est un polynôme de classe C^∞ et $\ln$ est une fonction de classe C^∞ donc f est de classe C^∞ (en particulier de classe C^2 sur son domaine).
$f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$
$f(y_0)f''(x) > 0$
Donc, la méthode de Newton converge.
$y_1 = \frac{y_0^3+y_0^2+2y_0+1-(1+y_0)\ln(1+y_0)}{2y_0^2+2y_0+1} = 1 - \frac{2\ln(2)}{5} = 0.7227$
La méthode de Newton est d'ordre 2 alors que les autres méthodes sont d'ordre 1.

3. Sur l'intervalle $[0.5; 1]$, on considère le **schéma numérique** définissant la suite $(t_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_n = g(t_{n-1}) = \sqrt{1 - \ln(1 + t_{n-1})} \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

On donne : $\sup_{x\in[0.5;1]} |g'(x)| = 0.45$

a) **Vérifier** que ce schéma peut être utilisé pour déterminer une valeur approchée de x^* (la solution de (E)). **Identifier** une méthode classique qui peut générée ce schéma et la suite $(t_n)_n$;

On a x^* est solution de (E) donc $\ln(1 + x^*) = 1 - (x^*)^2$ et on déduit :

$$(x^*)^2 = 1 - \ln(1 + x^*) \Longrightarrow x^* = \pm\sqrt{1 - \ln(1 + x^*)} \Longrightarrow x^* = \sqrt{1 - \ln(1 + x^*)}$$

car $x^* > 0$.
Donc x^* est aussi solution du problème de point fixe :

$$x = g(x) = \sqrt{1 - \ln(1 + x)}$$

Le schéma numérique associé à ce problème et à cette méthode est donnée par :

$$\begin{cases} t_0 \in [0.5; 1] \\ t_{n+1} = g(t_n) = \sqrt{1 - \ln(1 + t_n)} \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} t_0 \in [0.5; 1] \\ t_n = g(t_{n-1}) = \sqrt{1 - \ln(1 + t_{n-1})} \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Qui est exactement la méthode sus-mentionnée (avec le choix $t_0 = 1$).

b) Étudier la **convergence**e de ce schéma ;
$g(x) = \sqrt{1 - \ln(1 + x)}$ est une fonction définie et derivable sur son domaine et en particulier sur $[0.5; 1]$, pour x et y dans cet intervalle, il existe, d'après le théorème des accroissements finis $c \in]0.5; 1[$ tel que :

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| \leq \sup_{x\in[0.5;1]} |g'(x)||x - y| = 0.45|x - y|$$

Donc, g est contractante de coefficient $k = 0.45$ et par conséquent la méthode converge, et la suite $(t_n)_n$ converge vers x^*.

c) Formuler une **majoration** de l'erreur $|t_n - x^*|$ puis déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une précision d'au moins 10^{-10}.

On a :

$$|t_n - x^*| = |g(t_{n-1}) - g(x^*)| \leq 0.45|t_{n-1} - x^*| = 0.45|g(t_{n-2}) - g(x^*)|$$

par induction :

$$|t_n - x^*| \leq (0.45)^n |t_0 - x^*| \leq 0.5(0.45)^n$$

Il suffit de choisir n tel que :

$$0.5(0.45)^n \leq 10^{-10} \Longrightarrow n\ln(0.45) \leq \ln(2) - 10\ln(10) \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(2) - 10\ln(10)}{\ln(0.45)} \simeq 27.9680$$

Il faut, au moins, 28 itérations.

Exercice 3 (1+2+1.5=4.5 POINTS) :

Soient x_0 et x_1 deux points tels que $x_0 = -1$ et $x_1 = 2$ et soit f une fonction continue sur $[-1;2]$.

1. Déterminer les deux **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_0(x)$ et $L_1(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0 et x_1 (noté Q) ;

$$L_0(x) = \frac{x-2}{-1-2} = \frac{2-x}{3} \qquad L_1(x) = \frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{x+1}{3}$$
$$Q(x) = f(-1)L_0(x) + f(2)L_1(x)$$

2. **Intégrer**, sur l'intervalle $[-1;2]$, les deux polynômes de Lagrange et le polynôme Q et déduire une **quadrature** $\widetilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} f(t)dt$, en précisant les deux **poids** ω_0 et ω_1.

   Peut-on associer cette quadrature à une **méthode classique** ? Laquelle ?

$$\int_{-1}^{2} L_0(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{2-x}{3} = \frac{1}{3}\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$$
$$\int_{-1}^{2} L_1(x)dx = \int_{-1}^{2} x + 13 = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$$
$$\widetilde{I} = \int_{-1}^{2} Q(x)dx = f(-1)\int_{-1}^{2} L_0(x)dx + f(2)\int_{-1}^{2} L_1(x)dx = \frac{3}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f(2) = 3\left(\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(2)}{2}\right)$$
$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$$

On retrouve la méthode du trapèze :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right)$$
$$\int_{-1}^{2} f(t)dt = (2-(-1))\left(\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(2)}{2}\right) = 3\left(\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(2)}{2}\right)$$

3. Utiliser la méthode **des trapèzes** (exactement 3 trapèzes) pour formuler une deuxième approximation l'intégrale I (notée $\widehat{I}$). Sans faire de calcul supplémentaire, comparer $\widetilde{I}$ et $\widehat{I}$ et expliquer.

$$I = \int_{-1}^{2} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{2} f(t)dt$$

$$\widehat{I} = (0-(-1))\left(\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(0)}{2}\right) + (1-(0))\left(\frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right) + (2-(1))\left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2}\right)$$

$$\widehat{I} = \frac{f(-1)}{2} + f(0) + f(1) + \frac{f(2)}{2}$$

La valeur $\widehat{I}$ est obtenue avec une méthode composite (des trapèzes), elle constitue une meilleure approximation que la méthode simple correspondante(trapèze)qui donne la valeur $\widetilde{I}$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE — 21 février 2022 — 2021 - 2022

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+3+3+3=11 POINTS) :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad 1+x=e^{1-x^2}$

1. Écrire (E) sous forme d'une équation $f(x)=0$ (f une fonction à déterminer). Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée $\overline{r}$, dans l'intervalle $[0;1]$.

$$(E) \qquad 1+x=e^{1-x^2} \Longrightarrow 1+x-e^{1-x^2}=0 \Longrightarrow f(x)=0$$

$$f(x)=0 \Longrightarrow 1+x=e^{1-x^2} \Longrightarrow (E)$$

avec $f(x)=1+x-e^{1-x^2}$.

f est une fonction continue (f est la somme d'un polynôme et d'une fonction exponentielle et les deux sont continues) en plus $f(0)=1-e<0$ et $f(1)=1$ (donc $f(0)f(1)<0$) et par conséquent l'equation $f(x)=0$ (et aussi (E)) admet au moins une solution.

D'autre part, $f'(x)=1+2xe^{1-x^2}>0$ pour $\in[0;1]$ ainsi f est strictement croissante et l'équation $f(x)=0$ (et aussi (E)) admet une et une seule solution.

2. Écrire l'**algorithme** de la méthode de Dichotomie permettant d'obtenir une valeur approchée de $\overline{r}$ avec une **précision** d'au moins ε.

Faire les calculs pour $\varepsilon=2^{-2}$, **localiser** la solution dans un intervalle $[a,b]\subset[0,1]$ et donner une **valeur approchée** de $\overline{r}$.

Initialisation : $a_0=0$, $b_0=1$ et $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$ Tant que $|b_k-a_k|>\varepsilon$ Faire $x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$

Si $f(a_k)f(x_k)<0$ alors $\begin{cases} a_{k+1}=a_k \\ b_{k+1}=x_k \end{cases}$ Sinon $\begin{cases} a_{k+1}=x_k \\ b_{k+1}=b_k \end{cases}$ L'algorithme se termine lorsque $|b_k-a_k|\leq$ ε et $\overline{r}\in[b_k;a_k]$ et $\overline{r}\simeq\frac{b_k+a_k}{2}$

$\overline{r}\in[a_k;b_k]$ et $\overline{r}\simeq\frac{a_k+b_k}{2}$.

$a_0=0$, $b_0=1$, $x_0=0.5$ $|b_0-a_0|=1>\varepsilon=2^{-2}=0.25$ et $f(0.5)=-0.6170>0$

$f(0)f(0.5)>0 \Longrightarrow a_1=0.5$, $b_1=1$, $x_1=0.75$ $|b_1-a_1|=0.5>\varepsilon=0.25$ et $f(0.75)=0.2011$

$f(0.5)f(0.75)<0 \Longrightarrow a_2=0.5$, $b_2=0.75$, $x_2=0.625$ $|b_2-a_2|=0.25\leq\varepsilon=0.25$

On en déduit : $\overline{r}\in[0.5;0.75]$ et $\overline{r}\simeq 0.625$ à 2^{-2} près.

3. On souhaite appliquer la **méthode de Newton** sur l'intervalle $[0,1]$ et on note $(t_n)_n$ la suite générée par cette méthode. Rappeler le **principe géométrique** de la méthode et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

Calculer $f''(0.5)$ et $f''(0.75)$. Que peut-on dire par rapport à la **convergence** de cette méthode.

La méthode de Newton consiste à construire une suite $(t_n)_n$ à partir d'une valeur initiale bien choisie t_0 et en déterminant successivement les termes de la manière suivante :

Pour déterminer le terme t_{k+1}, on trace la tangente T_k à la courbe de f au point $(t_k, f(t_k))$, cette droite T_k coupe l'axe des abscisses au point $(t_{k+1}, 0)$. On a T_k : $\quad y = f'(t_k)(x - t_k) + f(t_k)$

Si la tangente T_k est non horizontale ($f'(t_k) \neq 0$ ou généralement $f'(x) \neq 0$), le point d'intersection de T_k et l'axe d'abscisses est de coordonnées $(t_{k+1}, 0)$ donc :

$$0 = f'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + f(t_k) \Longrightarrow t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$$

donc :

$$t_{k+1} = \frac{-1 + (1 + 2t_k^2)e^{1-t_k^2}}{1 + 2t_k e^{1-t_k^2}}$$

$$f''(x) = 2(1 - 2x^2)e^{1-x^2})$$

$$f''(0.5) = 2.1170 \qquad f''(0.75) = -0.3872$$

On remarque que $f''(x)$ change de signe dans l'intervalle $[0, 1]$ donc une des conditions nécessaires n'est pas vérifiée et nous ne pouvons rien déduire par rapport à la convergence de la méthode.

4. Sur l'intervalle $[0; 1]$, on considère **la modification de la méthode de Newton** qui consiste à remplacer la tangente T_n, au point $(t_n, f(t_n))$, par la droite D_n parallèle à la tangente T_0 (au point $(t_0, f(t_0))$) et qui passe par $(t_n, f(t_n))$. Ainsi t_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite D_n avec l'axe des abscisses (OX). Faire un schéma et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

   D et T_0 sont parallèles sont elles ont le même coefficient directeur donc :

   D : $\quad y = f'(t_0)x + b$ et comme $(t_n, f(t_n)) \in D$ alors :

$$f(t_n) = f(t_0)t_n + b \Longrightarrow b = f(t_n) - f'(t_0)t_n$$

$$D : \quad y = f'(t_0)x + f(t_n) - f'(t_0)t_n$$

   La droite D est non horizontale ($f'(t_0) \neq 0$), le point d'intersection de D et l'axe d'abscisses est de coordonnées $(t_{k+1}, 0)$ donc :

$$f'(t_0)t_{n+1} + f(t_n) - f'(t_0)t_n = 0 \Longrightarrow t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_0)}$$

Exercice 2 (2.5+1.5=4 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)^3 - 1$

1. En utilisant la **méthode directe**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f, noté P, sur la base des points : -1, 0 et 1. Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(-\frac{1}{2})$ et calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = -\frac{1}{2}$.

   P est un polynôme de degré 2 on peut l'écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$ et comme $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} P(-1) = a - b + c = f(-1) = -1 \\ P(0) = c = f(0) = 0 \\ P(1) = a + b + c = f(1) = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - b = -1 \\ a + b = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

   Donc :

$$P(x) = 3x^2 + 4x$$

$$f(-0.5) \simeq P(-0.5) = -1.25$$

$$E_P(-0.5) = |f(-0.5) - P(-0.5)| = | - 0.875 - (-1.25)| = 0.375$$

2. Sans faire de calcul supplémentaire, donner le **polynôme d'interpolation** de f, noté Q, sur la base des points : -2, -1, 0 et 1. Que peut-on dire de l'**erreur** au point $x = -\frac{1}{2}$ (par rapport à Q).
   Le polynôme Q est de degré 3 (4 points) et comme f est un polynome de degré 3 alors $Q(x) = f(x)$ et l'erreur est par conséquent nulle $E_Q(-0.5) = 0$

Exercice 3 (1.5+2+1.5=5 POINTS) :

Soient $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et soit f une fonction continue sur $[-2; 1]$.

1. On donne $L_0(x) = \frac{1}{6}(x^2 - x)$, déterminer les deux autres **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_1(x)$ et $L_2(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 (noté P).

$$L_1(x) = \frac{(X+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} = \frac{-1}{2}(x^2 + x - 2) \qquad L_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)} = \frac{1}{3}(x^2 + 2x)$$

2. On donne $\int_{-2}^{1} L_1(x)dx = \frac{9}{4}$, calculer $\int_{-1}^{2} L_0(x)dx$ et $\int_{-1}^{2} L_2(x)dx$. Puis, en **Intégrant**, sur l'intervalle $[-2; 1]$, le polynôme d'interpolation, P, déduire une **quadrature** $\widetilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-2}^{1} f(t)dt$. On donne $\omega_0 = \frac{1}{4}$, préciser les deux autres **poids** ω_1 et ω_2.

$$\int_{-2}^{1} L_0(x)dx = \frac{1}{6}[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-2}^{1} = \frac{3}{4} \qquad \int_{-2}^{1} L_2(x)dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3} + x^2]_{-2}^{1} = 0$$

$$\widetilde{I} = \int_{-2}^{1} P(t)dt = f(-2)\int_{-2}^{1} L_0(t)dt + f(0)\int_{-2}^{1} L_1(t)dt + f(1)\int_{-2}^{1} L_2(t)dt$$

$$\widetilde{I} = \frac{3}{4}f(-2) + \frac{9}{4}f(0) + 0f(1) = 3(\frac{1}{4}f(-2) + \frac{3}{4}f(0) + 0f(1))$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4} \quad \omega_1 = \frac{3}{4} \quad \omega_2 = 0$$

3. Utiliser la méthode **de Simpson** pour formuler une deuxième approximation de l'intégrale I (notée $\widehat{I}$). Expliquer la différence entre $\widetilde{I}$ et $\widehat{I}$.

$$\widehat{I} = 3(\frac{1}{6}f(-2) + \frac{4}{6}f(-0.5) + \frac{1}{6}f(1))$$

La méthode de Simpson est une méthode Newton-cotes (les points sont équidistants -2, -0.5 et 1 car $-0.5 - (-2) = 1.5$ et $1 - (-0.5) = 1.5$) alors que la première quadrature est obtenue sur la base de trois points non équidistants (-2, 0 et 1 car $0 - (-2) = 2$ et $1 - 0 = 1$).

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

CONTRÔLE — 14 janvier 2023 — 2022 - 2023

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (1.5+2.5+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8 - x^3$.

1. **Étudier** la fonction f sur $\mathbb{R}$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que f est **bijective** et vérifier que l'équation (Eqt) $f(x) = 0$ admet **une solution unique** $\widetilde{x}$. Quelle est la valeur **exacte** de $\widetilde{x}$?
   f est un Polynôme, $f'(x) = -3x^2 < 0$ (pour $x \neq 0$), $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Donc f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que 0 admet un seul antécédent $\widetilde{x}$ tel que $f(\widetilde{x}) = 0$ c'est à dire que $\widetilde{x}$ est l'unique solution de (Eqt).
   $$8 - x^3 = 0 \Longrightarrow x^3 = 8 = 2^3 \Longrightarrow x = 2$$
   Donc
   $$\widetilde{x} = 2$$

2. Vérifier que $\widetilde{x} \in [1; 4]$ et calculer les **trois** premières valeurs approchées, c_0, c_1 et c_2, données par **la méthode de Dichotomie**. Donner une majoration de l'erreur de l'approximation de $\widetilde{x}$ par c_2.
   Déterminer le **nombre d'itérations**, n, nécessaires pour obtenir une valeur approchée, c_n, de $\widetilde{x}$ avec une précision au moins égale à 10^{-5}.

   $f(1) = 8 - 1 = 7$, $f(4) = 8 - 64 = -56$ et $f(1)f(4) < 0$ par conséquent $\widetilde{x} \in [1, 4]$ et on a :
   $a_0 = 1$, $b_0 = 4$, $c_0 = \frac{1+4}{2} = 2.5$, $f(2.5) = -7.625$ et $f(1)f(2.5) < 0$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 2.5$
   $a_1 = 1$, $b_1 = 2.5$, $c_1 = \frac{1+2.5}{2} = 1.75$, $f(1.75) = 2.6406$ et $f(1)f(1.75) > 0$ donc $a_2 = 1.75$ et $b_1 = 2.5$
   $a_2 = 1.75$, $b_1 = 2.5$, $c_2 = \frac{1.75+2.5}{2} = 2.125$
   Deux itérations :
   $$|\widetilde{x} - c_2| \leq \frac{4-1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$
   Ou bien $\widetilde{x}$ et c_2 sont donc $[1.75; 2.5]$ donc
   $$|\widetilde{x} - c_2| \leq 2.5 - 1.75 = 0.75$$
   Pour c_n nous avons :
   $$|\widetilde{x} - c_n| \leq \frac{3}{2^n}$$
   Il suffit de choisir n tel que :
   $$\frac{3}{2^n} \leq 10^{-5} \Longrightarrow 3e^{-n\ln(2)} \leq e^{-5\ln(10)} \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(3) + 5\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 18,1946$$
   Au moins 19 itérations.

3. Définir la suite, x_n, des itérés de **la méthode de Newton**. Préciser, x_0, la meilleure **initialisation** possible parmi les quatre valeurs suivantes : 1, 4, 1.75 et 2.5 puis calculer x_1. Étudier la **convergence** de cette méthode.
   x_0 bien choisie et
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{8 - x_n^3}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 8}{3x_n^2}$$
   Nous avons $f''(x) = -6x < 0$ pour $x > O$ donc x_0 doit vérifier $f(x_0)$ à le même signe que $f''(x)$ et par conséquent $f(x_0)$ doit être négative ce qu'est vrai pour 2.5 et 4 mais d'après la questions précédente, la solution est localisée dans $[1.75; 2.5]$ alors la meilleure initialisation est 2.5.
   $$x_1 = \frac{2x_0^3 + 8}{3x_0^2} = \frac{2(2.5)^3 + 8}{3(2.5)^2} \simeq 2.0933$$
   Les conditions de convergence sont bien vérifiées :
   f est de classe C^2 (Polynôme)
   $f'(x) = -3x^2 < 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
   $f''(x) = -6x < 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
   $f(x_0)f''(x) > 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
   La méthode de Newton est convergente sur $x \in [1.75; 2.5]$.
4. Transformer l'équation (Eqt) en un problème de recherche de **point fixe** et écrire l'**algorithme** correspondant (on ne demande pas l'étude de la convergence).
   $$(Eqt)\ \ 8 - x^3 = 0 \Longrightarrow -x^3 + x + 8 = x \Longrightarrow g(x) = x$$
   avec $g(x) = -x^3 + x + 8$
   L'algorithme (avec une précision ε) :
   $y_0 \in [1.75; 2.5]$
   Tant que $|g(y_n) - y_n| > \varepsilon$ faire
   $$y_{n+1} = g(y_n)$$

Exercice 2 (3+1.5=4.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et les trois points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant **DEUX** parmi les trois méthodes habituelles (Lagrange, Newton et Directe).
   $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
   Méthode directe : $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ et les equations $f(x_i) = P_2(x_i)$ donnent le système suivant :
   $$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
   Donc $P_2(x) = x$
   Méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
-1	-1		
0	0	1	
1	1	1	0

Donc

$$P_2(x) = -N_0(x) + N_1(x) + 0 \times N_2(x) = -1 + (x+1) + 0 = x$$

Méthode de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{((1+1)(1+0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P_2(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) = -\frac{x^2-x}{2} + 0 + \frac{x^2+x}{2} = x$$

2. Donner une **majoration** de l'erreur d'interpolation.

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x+1)(x-0)(x-1)| \sup_{x\in[-1;1]} |f^{(3)}(x)|$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$f''(x) = -(\frac{\pi}{2})^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)$$

$$f^{(3)}(x) = -(\frac{\pi}{2})^3 \cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = (\frac{\pi}{2})^3$$

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^3|x^3 - x| = \frac{\pi^3}{48}|x^3 - x|$$

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

1. Déterminer α, β et γ pour que (App) soit **exacte** pour les polynômes de degré 0, 1 et 2 (on peut utiliser successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$).

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \int_{1}^{1} dx = 2 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$f(x) = x \Longrightarrow \int_{1}^{1} xdx = 0 = -\alpha + \gamma$$

$$f(x) = x \Longrightarrow \int_1^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \alpha + \gamma$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \gamma \\ \frac{2}{3} = \alpha + \gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2. On suppose que $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, puis on se donne les points $\{x_i\}_{i=0\ldots n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b] : x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. En utilisant un **changement de variable affine**, dans I, déduire la formule de **quadrature** suivante :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}))$$

On pose $x = mt + p$ le changement de variable entre $[x_i; x_{i+1}]$ et $[-1, 1]$ alors :
Pour $x = x_i$, $t = -1$ donc $x_i = -m + p$
Pour $x = x_{i+1}$, $t = 1$ donc $x_{i+1} = m + p$

$$\begin{cases} x_i = -m + p \\ x_{i+1} = m + p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \frac{h}{2} \\ p = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = x_i + \frac{h}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2}$, $dx = \frac{h}{2}dt$, $t = \frac{x - x_i - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ et $dt = \frac{dx}{\frac{h}{2}}$ On a :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2})\frac{h}{2}dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2})dt$$

En utilisant (App) on a :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}f(-\frac{h}{2} + x_i + \frac{h}{2}) + \frac{4}{3}f(\frac{h}{2} \times 0 + x_i + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3}f(\frac{h}{2} + x_i + \frac{h}{2})\right)$$

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}f(x_i) + \frac{4}{3}f(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3}f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1})\right)$$

3. En déduire une formule de quadrature **composite** pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx =$

$$\frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1)\right) + \frac{h}{6}\left(f(x_1) + 4f(x_1 + \frac{h}{2}) + f(x_2)\right) + \cdots + \frac{h}{6}\left(f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1} + \frac{h}{2}) + \right.$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_n)\right)$$

Exercice 4 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = y_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Vérifier que (PC) admet une **solution unique** et déterminer cette solution (**exacte**). Le problème de Cauchy est tel que $f(t,x) = -3x$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (de rapport 3) :

$$|f(x) - f(y)| = |-3x + 3y| = 3|x - y|$$

On en déduit le problème admet une solution unique. Par séparation des variables, nous avons :

$$\frac{dx}{x} = -3dt \Longrightarrow \ln(x) = -3t + c \Longrightarrow x(t) = ke^{-3t}$$

Or

$$x(0) = y_0 \Longrightarrow k = y_0$$

Donc, la solution exacte est :

$$x(t) = y_0 e^{-3t}$$

2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser la méthode du **trapèze** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n (Schéma de Crank-Nicolson).

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -3x(t)dt \Longrightarrow x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{h}{2}(-3x(t_n) - 3x(t_{n+1}))$$

En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-3h}{2}(x_{n+1} + x_n) \Longrightarrow (1 + \frac{3h}{2})x_{n+1} = (1 - \frac{3h}{2})x_n$$

Soit

$$x_{n+1} = \frac{2 - 3h}{2 + 3h} x_n$$

3. On suppose que $h = \frac{1}{4}$, calculer $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

$$x_{n+1} = \frac{2 - 3h}{2 + 3h} x_n = \frac{5}{11} x_n$$

La suite $(x_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{11}$ avec $|q| < 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

RATTRAPAGE —17 février 2023—2022 - 2023—

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+2+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x-2}$.

1. **Étudier** la fonction g sur $[-2, 0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème $(PF)\ \ g(x) = x$ admet **une solution unique** r. Quelle est la valeur **exacte** de r ?
   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, continue sur son domaine (rationnelle) et on a $g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $[-2, 0]$ ce que implique que g est une bijection de $[-2, 0]$ vers $g([-2, 0]) = [-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}] \subset [-2, 0]$. Cette dernière inclusion avec la continuité de g implique l'existence d'au moins un point fixe et comme g est strictement décroissante ce point fixe est unique.
   Pour $x \neq 2$, $\frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ou $x = 3$. Par conséquent, l'unique solution dans $[-2, 0]$ est $r = -1$.
2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF), et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.
   La suite $(x_n)_n$ est définie par :
   $$\begin{cases} x_0 \in [-2, 0] \\ x_{n+1} = g(x_n) = \frac{3}{x_n-2} \end{cases}$$
   Pour $x \in [-2, 0]$, on a :
   $-2 \leq x \leq 0 \Longrightarrow -4 \leq x-2 \leq -2 \Longrightarrow 4 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Longrightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{3}{(x-2)^2} \leq \frac{3}{4}$
   $\Longrightarrow \sup_{x\in[-2,0]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$, par conséquent, la fonction g est Lipschitizienne ce que implique que la méthode du point fixe (et $(x_n)_n$) est convergente. D'autre part, on a :
   $$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1}))| \leq \tfrac{3}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq (\tfrac{3}{4})^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq (\tfrac{3}{4})^n|x_1 - x_0| \leq 2(\tfrac{3}{4})^n$$
   Il suffit de considérer n tel que :
   $2(\frac{3}{4})^n \leq 10^{-4} \Longrightarrow e^{n\ln(\frac{3}{4})} \leq 0.00005 \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(0.00005)}{\ln(\frac{3}{4})} \simeq 34.4251 \Longrightarrow n = 35$ donc, il faut exécuter au moins 35 itérations.
3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'un équation non linéaire de la forme $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eqt), appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r.
   $(PF) \Longrightarrow \frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ on pose donc $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et le problème (PF) peut être résolu en utilisant l'équation non linéaire $(Eqt)\quad f(x) = 0$. r est solution de (PF) alors $\frac{3}{r-2} = r \Longrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$ ce que signifie que r est solution de (Eqt).
   On a : f est une fonction continue, $f'(x) = 2x - 2 < 0$ sur $[-1.75; 0]$ et $f(-1.75) \times f(0) = 1.5625 \times (-3) < 0$ et par conséquent, r est la seule solution de (Eqt) dans $[-1.75; 0]$

$x_0 = \frac{-1.75+0}{2} = -0.875$, $f(-0.875) = -0.4843$ on a $f(-1.75) \times f(-0.875) < 0 \Longrightarrow r \in [-1.75; -0.875]$
$x_1 = \frac{-1.75+(-0.875)}{2} = -1.3125$

4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par : $\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} \end{cases}$

   Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.
   $y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} = \frac{2y_n^2-y^2-2y_n+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)}{2y_n-2} + \frac{-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = y_n - \frac{y^2-2y_n-3}{2y_n-2}$
   Donc $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ et on reconnaît la méthode de Newton.
   On a f est classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-2, 0]$, $f'(x) = 2x - 2 <$ sur $[-2, 0]$ et $f''(x) = 2 > 0$
   Donc la convergence de la méthode dépend du choix de x_0, la méthode est convergente pour tout valeur x_0 tel que $f(x_0) > 0$ (C'est à dire $x_0 \in [-2, -1[$).

Exercice 2 (2+2+1.5=5.5 POINTS) : (Les trois questions sont indépendantes)

Soit f la fonction donnée par le tableau suivant :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x_i)$	1	2	9	28

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant la méthode de **Lagrange**.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2-2x}{-1} = 2x - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) = \frac{x^2-3x+2}{2} + 2(2x-x^2) + 9\frac{x^2-x}{2} = 3x^2 - 2x + 1$$

2. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_1, x_2 et x_3 en utilisant la méthode de **Newton**.

   Méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
1	2		
2	9	7	
3	28	19	6

   Donc

$$P_2(x) = 2N_0(x) + 7N_1(x) + 6N_2(x) = 2 + 7(x-1) + 6(x-1)(x-2) = 6x^2 - 11x + 7$$

3. Donner une valeur approchée de $\int_0^3 f(x)dx$ en utilisant la méthode **des trapèzes** (composite avec 3 trapèzes).

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \simeq \frac{1-0}{2}(f(0)+f(1)) + \frac{2-1}{2}(f(1)+f(2)) + \frac{3-2}{2}(f(2)+f($$

Donc

$$\int_0^3 f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3) = 25.5$$

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(x_0) + f(1)\right)$$

1. Déterminer x_0 pour que (App) soit **<u>exacte</u>** pour les polynômes de degré 0 et 1 (On peut utiliser $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$).
   $f(x) = 1 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 \approx \frac{1}{3}(1+4+1) = 2$
   $f(x) = x \Longrightarrow \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0 \approx \frac{1}{3}(-1+4x_0+1) = \frac{4}{3}x_0 \Longrightarrow x_0 = 0$

2. On suppose que $x_0 = 0$, en utilisant un **changement de variable affine**, dans $I = \int_a^b f(x)dx$, déduire une formule (Q) permettant de calculer une valeur approchée de I.
   On pose $x = mt + p$ le changement de variable entre $[a;b]$ et $[-1,1]$ alors :
   Pour $x = a$, $t = -1$ donc $a = -m + p$
   Pour $x = b$, $t = 1$ donc $b = m + p$

$$\begin{cases} a = -m + p \\ b = m + p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \frac{b-a}{2} \\ p = \frac{b+a}{2} \end{cases}$$

   $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$, $dx = \frac{b-a}{2}dt$, $t = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}$ et $dt = \frac{dx}{\frac{b-a}{2}}$ On a :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})dt$$

   En utilisant (App) on a :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\frac{1}{3}\left(f(-\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}) + 4f(\frac{b-a}{2} \times 0 + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2})\right)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

3. Vérifier que (Q) est une **quadrature** de type Newton-cotes, laquelle ? Déterminer **l'ordre** exacte de (Q).

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

   Les points d'intégration sont équidistants : $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$ sont tels que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2}$ et $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$ On reconnaît le schéma général d'une quadrature de Newton-cotes avec $n = 2$ et la quadrature est celle de Simpson. Comme n est pair, l'ordre exacte est $n + 1 = 3$.

Exercice 4 (1.5+2=3.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. On suppose que (PC) admet une **solution unique**. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à gauche** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

   $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \simeq f(t_n; x(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = (t_{n+1} - t_n) f(t_n; x(t_n)) = hf(t_n$$

   En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on a : $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$

2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à droite** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Transformer le schéma implicite ainsi obtenu en un schéma explicite.

   $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \simeq f(t_{n+1}; x(t_{n+1})) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}; x(t_{n+1})$$

   En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on a : $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$ qui est un schéma implicite.
   Pour rendre le schéma explicite, nous pouvons remplacer x_{n+1} dans le second membre par une expression équivalente, par exemple, avec la formule de la première question :

   $$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))$$

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**