UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

FACULTÉ DES SCIENCES - TÉTOUAN

Licence Fondamentale Sciences de la Matière Chimie

Semestre 3 - M20 : Mathématiques pour la Chimie

ANNALES DES EXAMENS

Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**

Département de Mathématiques

2019-2020

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.cla.fr

---

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié "Annales des examens", destiné aux étudiant du semestre trois de la Licence Fondamentale Sciences de la Matière Chimie, est conforme au nouveau programme appliqué depuis 2014. En particulier, la réforme 2014 a réintégrée des cours de Mathématiques dans la filière SMC visant le développement de l'esprit d'analyse et de synthèse et la favorisation de l'approche scientifique dans le traitement des problèmes théoriques et expérimentaux.

Ce polycopié propose les sujets d'examens proposées durant les années universitaires de 2014-2015 à 2019-2020 ainsi que des indications et des solutions détaillées.

Ce polycopié se limite au contenu enseigné à la Faculté des Sciences de Tétouan, le lecteur intéressé par plus d'approfondissements peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus complète.

BOUCHAIB FERRAHI

Chapitre 1

ANNALES DES EXAMENS - SUJETS

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
CONTRÔLE CONTINU JANVIER2015 DURÉE : 1H30

— EXERCICE 1 (4 POINTS) :
Écrire le nombre $x = \overline{A3}^{11}$ suivant les bases 10, 2, 16 et 4 en utilisant une seule fois chacune des quatre méthodes : $b \to 10$, $10 \to b$, $b \to b^n$ et $b^n \to b$ (Présenter toutes les étapes et les détails des calculs).

— EXERCICE 2 (4.5 POINTS) :
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$U_n = \frac{2}{n^2 + n}$$

1. Quelle-est la nature de la série de terme général U_n ? justifier votre réponse ;
2. Trouver a et b tels que $\frac{2}{n^2+n} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n}$;
3. Calculer :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} U_n$$

4. Que peut-on dire de la série de terme général $V_n = -\frac{2}{n^2+n}$.

— EXERCICE 3 (7 POINTS) :
1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 26 et 33 ;
2. Calculer $PGCD(26, 33)$ et $PPCM(26, 33)$;
3. En utilisant l'algorithme d'Euclude, déterminer u_0 et v_0 tels que $33u_0 - 26v_0 = 1$;
4. Soit (E) l'équation d'inconnus U et V entiers relatifs tels que : $33U - 26V = 3$;
   Donner une solution particulière (U_0, V_0) de (E) ;
5. Soit (U, V) la solution générale de (E), établir la relation suivante : $33(U - U_0) = 26(V - V_0)$;
6. En utilisant un calcul modulaire, déterminer (U, V) la solution générale de (E).

— EXERCICE 4 (4.5 POINTS) :

Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes différents de 0. $(\mathbb{C}^*, \times)$ menu de la multiplication habituelle :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' - bb' = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$

est un groupe dont l'élément neutre est 1. On définit le sous ensemble H de $\mathbb{C}^*$ par :

$$H = \{-1, 1, -i, i\}$$

1. Construire la table de multiplication de H ;
2. H est-il un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$? Justifier votre réponse ;
3. Soit $f : (\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ l'application telle que :

$$f(z) = f(a + ib) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Montrer que f est un morphisme de groupes.■

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
RATTRAPAGE MARS 2015 DURÉE : 1H30

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

1. Rappeler la règle d'Alembert pour l'étude de la convergence des séries numériques à termes positifs ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $U_n = \frac{n!}{n^n}$
   Expliquer pourquoi on peut utiliser la règle d'Alembert pour étudier la convergence de la série de terme général U_n ;
3. Montrer que la série de terme général U_n converge ;
4. Pourquoi la série de terme général $V_n = 1 + \frac{1}{n}$ diverge ?

EXERCICE 2 (4 POINTS) :

1. Écrire le nombre $x = 125$ suivant la base $b = 4$;
2. Déduire de 1. l'écriture de x suivant la base $b' = 16$;
3. L'écriture binaire de x est donnée par $\overline{y1111z1}^2$, Déterminer y et z.

EXERCICE 3 (6 POINTS) : Le tableau suivant présente les étapes de calcul de l'Algorithme d'Euclude :

R_0	21	?	1
R_1	10	?	?
u_0	1	?	?
u_1	?	?	-10
v_0	?	?	?
v_1	?	?	21
Q	2	10	NA
R	1	0	NA
u	?	?	NA
v	?	?	NA

1. Recopier et compléter le tableau en remplissant les cases vides (mentionnées par ?) ;
2. Donner $PGCD(21, 10)$ et calculer $PPCM(21, 10)$;
3. Donner U_0 et V_0 tels que $-21U_0 + 10V_0 = 1$;
4. Soit (E) l'équation d'inconnus U et V entiers relatifs tels que $-21U + 10V = 7$;
   Donner une solution particulière puis la solution générale de (E).
5. (Question Bonus +1.5 Point) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$6x = 9 \; mod(15)$$

EXERCICE 4 (5 POINTS) :

Soit :

$$\mathbb{M}_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R} \text{ tels que } ad - bc \neq 0 \right\}$$

l'ensemble des matrices carrées de dimension 2 dont le déterminant est non nul. $(\mathbb{M}_2^*, \times)$ menu de la multiplication matricielle habituelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

est un groupe dont l'élément neutre est la matric unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit H le sous ensemble de $\mathbb{M}_2^*$ défini par :

$$H = \{A, B, C, D, E, I\}$$

1. Recopier et compléter la table de multiplication de H en remplissant les cases vides (mentionnées par ?) ;

$\times$	A	B	C	D	E	I
A	I	?	D	?	B	A
B	?	I	?	A	C	B
C	E	?	I	?	A	C
D	B	C	A	?	?	D
E	?	I	?	A	D	E
I	A	B	C	D	E	I

Présenter les calculs détaillés.

2. H est-il un sous groupe de $(\mathbb{M}_2^*, \times)$? Justifier votre réponse ;

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE CONTINU JANVIER2016 DURÉE : 1H30

EXERCICE 1 (3.5 POINTS) :

Répondre aux trois questions suivantes en **n'utilisant pas plus d'une seule fois** chaque méthode (parmi les quatres méthodes de transformation d'écritures entre les différentes bases).

1. Vérifier que le nombre $X = \overline{122}^{10}$ s'écrit suivant la base Octale comme suit : $X = \overline{172}^{8}$;
2. L'écriture binaire de X est donnée par $\overline{111yz10}^{2}$. Déterminer y et z ;
3. Écrire X suivant la base $b = 4$.

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

Soit (E_n) l'équation d'inconnus U et V nombres entiers relatifs et de paramètre $n \in \mathbb{N}$:

$$(E_n) \qquad nU + 14V = 6$$

1. Montrer qu'une écriture modulaire de (E_4) est donnée par :

$$(Eqt) \qquad \overline{2}.\overline{V} = \overline{2} \qquad (mod\ 4)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation modulaire (Eqt) ;
3. Le tableau suivant présente les étapes de calcul de l'Algorithme d'Euclude :

R_0	14	6	2
R_1	6	?	?
u_0	1	?	1
u_1	?	?	?
v_0	?	?	-2
v_1	?	?	?
Q	2	?	NA
R	2	0	NA
u	?	?	NA
v	?	?	NA

a. Recopier et compléter le tableau en remplissant les cases vides (mentionnées par ?) ;

b. Donner $PGCD(14, 6)$ et calculer $PPCM(14, 6)$;

4. Utiliser le tableau précédent pour trouver une solution particulière de (E_6).

EXERCICE 3 (5.5 POINTS) :

Soit H_5 le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par :

$$H_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

On considère sur H_5 la loi $\oplus$ définie, pour i et j dans H_5, par :

$$i \oplus j = \begin{cases} i + j & \text{si } i + j < 5 \\ i + j - 5 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la loi $\oplus$ est associative sur H_5 ;

2. Construire la table de la loi $\oplus$ sur H_5 ;

3. Montrer que $(H_5, \oplus)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

EXERCICE 4 (6 POINTS) :

Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = (x - 2)(3 - x)^n$:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[2, 4[$;

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[2, 4[$;

3. Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[2, 4[$;

4. Soit $2 < a < 3$, Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge normalement sur $[a, 3]$ vers une fonction qu'on note $f(x)$;

5. Expliquer pourquoi on peut écrire :

$$\int_a^3 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^3 f_n(x)dx$$

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
RATTRAPAGE 2015-2016 (OCTOBRE 2016) DURÉE : 1H30
M. FERRAHI

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

Soient $X = \overline{101101}^2$, $Y = \overline{146}^{10}$ et $Z = \overline{10nm}^2$.

1. Donner l'écriture de $X + Y$ dans la base octale ($b = 8$), en déduire son écriture binaire ($b = 2$) ;
2. Déterminer n et m sachant que $Y - Z = \overline{88}^{16}$.

EXERCICE 2 (8.5 POINTS) :

A titre de rappel, l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence (modulo n) est constitué des restes possibles de la division Euclidienne d'un entier quelconque par n. En plus, $\mathbb{Z}_n$ est l'ensemble des classes non nulles : $\mathbb{Z}_n = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \neq \overline{0}\}$.

La multiplication modulaire est définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour deux calasses $\overline{x}$ et $\overline{y}$, par :

$$\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{x \times y} = \text{ Reste de la division Euclidienne de } x \times y \text{ par } n$$

1. Montrer que la loi $\otimes$ est associative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. Dresser la table de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \otimes)$ et vérifier que $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$ est un groupe ;
3. Est ce que $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ est un groupe ? Justifier la réponse ;
4. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donnée par : (E) $6U + 5V = 8$,
   a. Vérifier qu'une écriture modulaire de (E) est donnée par :
   $$(E_1) : \ \overline{5} \otimes \overline{V} = \overline{2} \text{ modulo } 6$$
   puis résoudre (E_1) dans $\mathbb{Z}$;
   b. Donner une équation (E_2) représentant une écriture modulaire (modulo 5) de E, puis préciser les solutions de (E_2) dans $\mathbb{Z}$;
   c. Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).

EXERCICE 3 (6.5 POINTS) :

Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = (1-2x)(2x)^n$:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
3. Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
4. Est ce que la série de terme général $(f_n)_n$ converge normalement sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$? sur $[-\frac{1}{4}, a]$ avec $a \in]-\frac{1}{4}, 0[$? Justifier.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE — lundi 13 février 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (3.5 POINTS) :

Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées :

$$N_1 = \overline{A1}^{16} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \overline{105}^{10}$$

Écrire $N = N_1 + N_2$ suivant les bases binaire ($b = 2$), hexadécimale ($b = 16$) et la base $b = 4$.

Exercice 2 (5 POINTS) :

1. Définir $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dresser la table de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \times)$;
2. Exécuter l'algorithme d'Euclide généralisé pour écrire le $PGCD(6, 15)$ comme combinaison entière de 6 et 15 ;
3. Soit (E_p) l'équation d'inconnus (x, y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, avec p un paramètre entier, donnée par :

$$(E_p) \qquad p.x + 15y = 9$$

   a. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation (E_0) ;
   b. Donner une **solution particulière** de (E_6).
4. Donner la décomposition en facteurs premiers du $PPCM(6, 15)$.

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit $U_{\sqrt{2}}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$U_{\sqrt{2}} = \left\{ x_n^m = n + m\sqrt{2} \text{ tel que } n \text{ et } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe dont l'élément neutre est 0 et le symétrique de $x \in \mathbb{R}$ est $(-x)$.

1. Montrer que $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un groupe Abelien (commutatif) ;
2. Montrer **directement** que $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un **sous-groupe** de $(\mathbb{R}, +)$;
3. Soit $\phi : (U_{\sqrt{2}}, +) \to (U_{\sqrt{2}}, +)$ l'application telle que :

$$\phi(x_n^m) = \phi(n + m\sqrt{2}) = n - m\sqrt{2}$$

   Montrer que ϕ est un morphisme de groupe. Est ce que ϕ est un isomorphisme ?
4. Vérifier que la multiplication est une loi interne sur $(U_{\sqrt{2}}, \times)$;
5. Sachant que $1 = x_1^0 \in U_{\sqrt{2}}$ est l'élément neutre de $(U_{\sqrt{2}}, \times)$, calculer :

$$x_1^2 \times x_n^m = (1 + 2\sqrt{2})(n + m\sqrt{2})$$

Que peut-on déduire pour $1+2\sqrt{2}$ et $(U_{\sqrt{2}}, \times)$?

Exercice 4 (5.5 POINTS) : Les deux questions sont indépendantes.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la **suite de fonctions** $(f_n(x))_n$ définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
2. Étudier la **convergence simple** sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ puis sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ de la **série de fonctions** de terme général $g_n(x)$ donné par :
$$g_n(x) = (x)^{3n}$$
Que peut-on dire de la convergence de cette même série sur $[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$?

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——————RATTRAPAGE ——————lundi 13 mars 2017——————2016 - 2017

Exercice 1 (4 POINTS) :

Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées :

$$N_1 = \overline{103}^4 \qquad \text{et} \qquad N_2 = \overline{B0}^{16}$$

1. Écrire $N = N_1 + N_2$ suivant les bases **Binaire** ($b = 2$) et **Octale** ($b = 8$) ;
2. Trouver x et y tels que $N = \overline{xy}^{16}$ dans la base **Hexadécimale** (x et y sont alphanumériques).

Exercice 2 (5 POINTS) :

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ des nombres 28 et 31, trouver alors deux nombres entiers relatifs u et v tels que $31u - 28v = 1$ puis résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :
$$(Eqt1) \qquad 31u - 28v = 100$$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation :
$$(Eqt2) \qquad 2x = 6$$

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les **fonctions affines** définies sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f_{a,b}(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont des FONCTIONS et non pas des nombres réels ! !

On rappelle que **la somme de deux fonctions** f et g, notée $f \oplus g$, est définie par :

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

1. Déterminer $f_{a,b} \oplus f_{c,d}$ puis vérifier que $\oplus$ est **une loi de composition interne** sur $\mathcal{F}$;
2. Montrer que la loi $\oplus$ est **associative** sur $\mathcal{F}$;
3. Montrer que $(\mathcal{F}, \oplus)$ est un **groupe commutatif** ;
4. Soit $\mathcal{F}^0$ l'ensemble de toutes les **fonctions constantes** définies sur $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{F}^0 = \{f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f_b(x) = b \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$$
Montrer que $(\mathcal{F}^0, \oplus)$ est un **sous groupe** de $(\mathcal{F}, \oplus)$;
5. Dans cette question, l'ensemble $\mathcal{F}$ est muni de la loi $\circ$, de **composition des fonctions**, définie par :
$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right]$$

Est ce que la loi $\circ$ est interne sur $\mathcal{F}$? admet-elle un élément neutre ? Est ce que $f_{0,1}$ admet un élément symétrique ? conclure.

Exercice 4 (5 POINTS) :

1. Étudier la convergence **simple et uniforme** de la **suite de fonctions** $(f_n(x))_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$
2. Montrer que, pour $x \neq 0$, la **somme partielle** de **la série de terme général** $g_n(x) = x^2 f_n(x)$ est donnée par :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} g_n(x) = x^2 \left(\frac{1-(\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}} \right)$$
3. Étudier la **convergence simple et uniforme** de la **série de fonctions** de terme général $g_n(x)$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE —— *jeudi 18 janvier 2018* —— 2017 - 2018

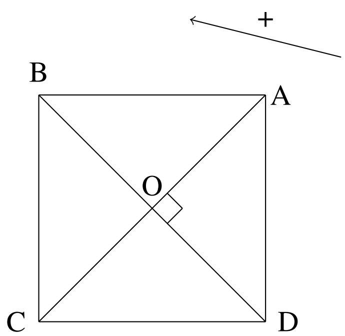
Exercice 1. (7.5 POINTS) :

Soit $(ABCD)$ un carré de centre O.

Dans le plan du carré, on considère les transformations suivantes :

r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r' la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, s la symétrie centrale de centre O et e l'identité.

1. Expliciter les 4 transformations en précisant, pour chacune, les images des points A, B, C, D et O ;



2. Soit $(T, \circ)$ l'ensemble des quatre transformations muni de **la loi $\circ$ de composition des applications**. **Recopier et compléter** la table ci-jointe puis vérifier que $(T, \circ)$ est un groupe.
   Ce groupe est-il Abélien ? Quel-il est son ordre ?

$\circ \nearrow$	e	r	r'	s
e	$e \circ e = e$	$e \circ r = r$	?	$e \circ s = s$
r	$r \circ e = r$	$r \circ r = s$	?	?
r'	?	$r' \circ r = e$	?	$r' \circ s = r$
s	$s \circ e = s$	$s \circ r = r'$	?	?

3. Déterminer **Tous les sous-groupes** de $(T, \circ)$ (justifier la réponse) ;
4. On note $(\mathbb{Z}_5^*, \times)$ le groupe des classes modulo 5 (non nulles) muni de la multiplication.
   Soit $f : (T, \circ) \to (\mathbb{Z}_5^*, \times)$ l'application telle que : $r \mapsto \overline{2}$ $\quad r' \mapsto \overline{4}$ et $\quad s \mapsto \overline{3}$
   Calculer $f(r \circ s)$. Est ce que f est un homomorphism de groupes ?
5. Le **tétrafluorure de xénon** est le composé chimique de formule XeF_4, il se forme à partir de xénon (Xe) et de fluor (F). Il se présente sous forme d'un solide cristallin incolore et les études chimiques montrent que, dans les conditions normales, la molécule XeF_4 possède une géométrie plane carrée (Les cinq atomes sont dans le même plan et représentent les sommets et le centre d'un carré).
   a. Déterminer **quatre (4) éléments de symétrie** de XeF_4 **dont** un axe de symétrie noté A et un plan de symétrie noté P (Préciser la nature de chaque élément) ;
   b. Déterminer la composition : A suivi de P.

Exercice 2. *Les trois questions sont indépendantes* (6.5 POINTS) :

1. **Recopier et compléter** les trois transformations entre les différentes bases en présentant les **détails des calculs** :

$$\overline{1B0}^{16}$$

$$\swarrow \qquad \qquad \nwarrow$$

$$\overline{432}^{\bullet\bullet} \longrightarrow \overline{123\bullet\bullet}^{4}$$

2. a. **Recopier et compléter** le tableau de l'algorithme généralisé d'Euclude en présentant les détails des calculs et **déduire** les **deux résultats** donnés par cet algorithme ;

   b. Déterminer $PGCD(20,35)$ et $PPCM(20,35)$ en utilisant une autre méthode.

R_1	35	?	?	5
R_0	20	15	?	0
u_0	1	?	1	?
u_1	0	?	-1	4
v_0	0	1	?	?
v_1	1	-1	?	-7
Q	1	1	?	NA
R	?	5	?	NA
u	?	-1	4	NA
v	?	?	-7	NA

3. Résoudre les **équations modulaires** suivantes :

- Dans $\mathbb{Z}$: (E_1) $2x = 6$ modulo 8
- Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: (E_2) $3t = 4$

Exercice 3. (6 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = x^{2n}$$

1. Étudier **la convergence simple et uniforme** de la **suite de fonctions** $f_n(x)$ sur $[0,1]$;
2. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** de cette **suite de fonctions** sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$?
3. Étudier **la convergence simple** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0,1[$;
4. Étudier **la convergence uniforme** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0,a[$ avec $a \in]0,1[$;
5. Développer la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en **série entière** de x et étudier **le rayon de convergence** de la série obtenue.

Question facultative (+1 POINT) :

Soit f la fonction impaire 2π-périodique telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,\pi[$. Calculer **les coefficients de Fourier** de f.

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——————*RATTRAPAGE* ——————*mercredi 21 février 2018*——————2017 - 2018

Calculatrices non programmables autorisées (mais l'échange est interdit)

Documents et téléphones portables interdits

Exercice 1. ***Les quatre questions sont indépendantes*** (7 POINTS) :

1. Détailler les transformations suivantes en n'utilisant **qu'une seule fois chacune des quatre méthodes** de transformations :

$$\overline{1F0}^{16} \to \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{4} \to \overline{496}^{\bullet\bullet} \to \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2} \to \overline{7\bullet 0}^{\bullet}$$

2. Soit (E) l'équation de variables entières U et V donnée par : $(E)\ : 820U + 246V = 164$.
   a. Calculer $PGCD(820, 246)$ puis montrer que : $(E) \Leftrightarrow 10U + 3V = 2$;
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide donner **une solution particulière** (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 4 + 3i$ et qu'elle converge pour $z = 3 + 4i$. Quel est son rayon de convergence ?

4. Montrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de $(G, *)$ alors $H \cap H'$ est aussi un sous-groupe de $(G, *)$.

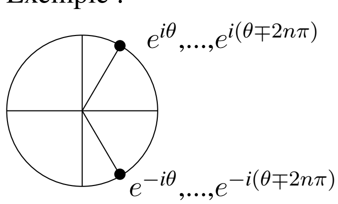
Exercice 2. (7 POINTS) :
Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes, différents de 0, donnés avec leurs **écriture exponentielle** :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{avec} \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ menu de la multiplication habituelle (en particulier : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$) est un **groupe Abelien dont l'élément neutre est** 1. Soit U_n le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$U_n = \left\{ x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1 \right\}.$$

Exemple :



1. Dans cette question on considère le cas : $n = 3$.
   a. Vérifier que $U_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right\}$;
   b. Construire la table de $(U_3, \times)$, vérifier que la loi est interne et que $(U_3, \times)$ est un groupe Abelien ;
   c. Le groupe $(U_3, \times)$ admet-il des sous groupes ? Si oui, lesquels ?
   d. Soit f et g les applications telles que : $f : (U_3, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ et $g : (U_3, \times) \to (\mathbb{R}, \times)$ avec :
   $$f(x_k) = g(x_k) = |x_k|$$
   (On rappelle que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module du nombre complexe $z = a + ib$). Vérifier que f **n'est pas un morphisme**. Que peut-on dire de g ?
2. Dans cette question on considère le cas général et on se place dans U_n :
   a. Montrer que :
   $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{\frac{2ik'\pi}{n}} = \begin{cases} e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n}} & \text{si } k + k' \leq n - 1 ; \\ e^{\frac{2i(k+k'-n)\pi}{n}} & \text{si } k + k' \geq n. \end{cases}$$
   et déduire que la multiplication $(\times)$ est interne à U_n ;
   b. Quel est le symétrique de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ dans $(U_n, \times)$;
   c. Vérifier que $(U_n, \times)$ est un groupe Abelien.

Exercice 3. (6 POINTS) :

Soit :
$$f_n(x) = x(1 - 2x)^n$$

1. Calculer $f_n(0)$, $f_n(\frac{1}{2})$ puis montrer que la **suite de fonctions** $f_n(x)$ **convergence simplement** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers une fonction notée f ;
2. On pose $g(x) = |f_n(x) - f(x)|$, montrer que $g'(x) = (1 - 2x)^{n-1}(1 - 2x(1 + n))$ et déterminer :
   $$\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} g(x)$$
   Déduire que la **suite de fonctions** $f_n(x)$ **convergence uniformément** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers f ;
3. On s'intéresse maintenant à l'étude de la **convergence** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$;
   a. Calculer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x)$ (Attention au cas particuliers !) ;
   b. Montrer que la **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ **converge simplement** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers une fonction notée S ;
   d. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** ?

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

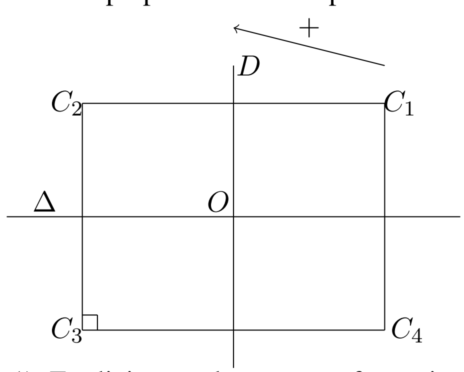
——————CONTRÔLE ——————*jeudi 10 janvier 2019*——————2018 - 2019

Exercice 1. (8 POINTS). (*Les questions sont indépendantes*) :

1) Rappeler la forme générale des **sous groupes** de $(\mathbb{Z}, +)$ et les utiliser pour vérifier que **la réunion** de deux sous groupes **n'est pas généralement** un sous groupe.
2) Donner le développement en **série entière** $\sum a_n x^n$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{(1-2x)(x-2)}$ (en supposant que le rayon de convergence est donné).
3) Déterminer **la transformée de Fourier** de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2, 2]. \end{cases}$
4) Soit (E) l'équation donnée par : $7x - 6y = 11$. Calculer, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, une **solution particulière** (x_0, y_0) de (E) et déduire que l'**ensemble des solutions** de (E) s'écrit : $\{(x_0 + 6k, y), k \in \mathbb{Z}\}$ avec y est à exprimer en fonction de k. Quel est **le nombre** de solutions qui vérifient $4 \leq x \leq 24$.
5) Effectuer **successivement** les transformations suivantes : $\overline{FA}^{16} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet}^{8} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2}$.

Exercice 2. (5.5 POINTS) :

La figure ci-jointe représente une table $(C_1C_2C_3C_4)$ de forme **rectangulaire**. La droite qui passe par les milieux de $[C_1C_2]$ et $[C_3C_4]$ est notée D, celle qui passe par les milieux de $[C_2C_3]$ et $[C_1C_4]$ est notée Δ et O le point d'intersection de ces deux droites. Par la suite, on considère les **quatre transformations** suivantes : E la transformation qui laisse chaque **coin invariant**, S_D et S_Δ les **symétries** , dans le plan de la table, respectivement **d'axes** D et Δ et R la **rotation**, dans l'**espace**, autour de l'axe perpendiculaire au plan de la table passant par O et d'**angle** π.



1) Expliciter les transformations S_D, S_Δ et R en précisant les images des quatre coins C_1, C_2, C_3 et C_4. A titre d'exemple :

$C_1 \overset{E}{\curvearrowright} C_1 \qquad C_2 \overset{E}{\curvearrowright} C_2 \qquad C_3 \overset{E}{\curvearrowright} C_3 \qquad C_4 \overset{E}{\curvearrowright} C_4$;

2) Soit G l'ensemble des **quatre transformations** muni de la **loi de composition** $*$ définie pour deux transformations, $T_1, T_2 \in G$, par :

$T_1 * T_2 =$ La transformation obtenue en appliquant **d'abord** la transformation T_1 **puis** la transformation T_2

Dresser la **table de composition** et vérifier que $(G, *)$ est un **groupe**. Est ce qu'il est **Abelien** ?

3) Déterminer **tous les sous-groupes** de G.

Exercice 3. (6.5 POINTS) :

Soit : $$f_n(x) = (2x)^{\frac{n}{2}}$$

1. Calculer $f_n(0)$, $f_n(\frac{1}{2})$ et $f_n(1)$;
2. Étudier **la convergence simple** de la **suite de fonctions** $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. Déduire que la **suite de fonctions converge simplement** sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ (à déterminer) vers une limite f à déterminer. Que peut-on dire de la **convergence uniforme** sur I ?
3. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** de cette **suite de fonctions** sur $[0, a]$ avec $a \in]0, \frac{1}{2}[$?
4. Étudier **la convergence simple** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. Déduire que cette série **converge simplement** sur un intervalle à préciser ;
5. Étudier **la convergence** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0, a[$ avec $a \in]0, \frac{1}{2}[$;
6. Exprimer autrement l'intégrale $I = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{\frac{n}{2}} dx$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. Page1/1

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

- RATTRAPAGE — *mercredi 13 février 2019* — 2018 - 2019

Questions indépendantes (11.5 POINTS) :

1) Étudier la **convergence simple** de **la suite de fonctions** définie par : $f_n(x) = x(1-2x)^n$ sur $[0, 1[$.

2) Étudier la **convergence de la série de fonctions** du terme général $f_n(x)$ tel que : $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ Est ce que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue ? Justifier.

3) Une **série entière** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ **converge** pour $z_0 = 3 + 4i$ et **diverge** pour $z_1 = 4 + 3i$. Déterminer son **rayon de convergence**. Que peut on déduire si $z_1 = 6i$?

4) Déterminer le **développement en série entière** de x la fonction f (On suppose que le rayon de convergence R est donné) : $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

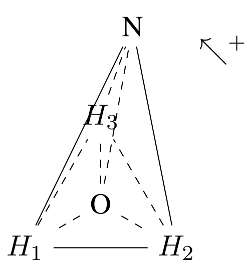
5) Déterminer **la série de Fourier**, sous forme **trigonométrique**, de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ sur $[-\pi, \pi[$.

6) Effectuer **les transformations** suivantes (dans **cet ordre** et en **détaillant les calculs**) :
$\overline{101}^5 \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{10} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{8} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{16}$

7) Trouver **tous les couples** $(s, t), s < t$, tels que : $PGCD(s, t) = 4$ et $PPCM(s, t) = 56$, $s, t \in \mathbb{N}$.

Exercice (8.5 POINTS) :

L'ammoniac est une molécule pyramidale à base triangulaire : l'atome de l'azote (N) est au sommet de la pyramide et les trois atomes d'hydrogène (H) occupent les trois sommets de la base (triangle) notés H_1, H_2 et H_3 et soit O le centre de cette base. On considère les **six éléments de symétrie** ci-après :



T_1 la transformation telle que $N \longrightarrow N$,

$H_1 \longrightarrow H_2$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_1$
T_2 la **rotation** (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
Id la transformation qui laisse **invariant** tous les points
R_1 la transformation telle que : $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_1$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_2$
R_2 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_2 et le milieu de $[H_1H_3]$
R_3 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_3 et le milieu de $[H_2H_3]$

1) Quelle est **la nature du triangle** $H_1H_2H_3$? Préciser **la nature** de T_1 puis celle de R_1 ?
2) Expliciter les transformations T_2, Id, R_2 et R_3 en précisant les images des points N, H_1, H_2 et H_3 ;
3) Soit G l'ensemble des **six transformations** muni de, $\circ$, la **loi de composition habituelle**. Compléter la table ci-jointe et vérifier que $(G, \circ)$ est un **groupe non commutatif** ;
4) Le groupe $(G, \circ)$ admet-il des **sous-groupes de 3 éléments ? de 4 éléments ?** Si oui, les déterminer.

(Exemple : $\mathbf{T_1} \circ \mathbf{R_3} = \mathbf{R_2}$)

$\circ\nearrow$	Id	T_1	T_2	$\mathbf{R_3}$	R_2	R_1
Id	Id	T_1	T_2	R_3	R_2	R_1
$\mathbf{T_1}$	T_1	T_2	?	$\mathbf{R_2}$	R_1	R_3
T_2	T_2	?	?	?	?	?
R_3	R_3	R_1	?	Id	T_2	T_1
R_2	R_2	R_3	?	T_1	Id	T_2
R_1	R_1	R_2	?	T_2	T_1	Id

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. **Page1/1**

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——————-CONTRÔLE ——————*mercredi 29 janvier 2020*——————-2019 - 2020

Exercice I. (10 POINTS). (*Les **six** questions sont **indépendantes***) :

1. **Résoudre**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, **l'équation** suivante : $3u - 8v = 6$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.

2. Donner **tous** les nombres premiers, p, dont les **carrés** sont inférieurs à 617 ($p^2 \leq 617$), **décomposer** 1200 et 1234 en facteurs premiers puis **calculer** : $PGCD(1200; 1234)$ et $PPCM(1200; 1234)$.

3. Le **trichlorure de phosphore** est un composé de formule chimique PCl_3 (P : Phosphore, Cl :Chlore). Préciser la **géométrie moléculaire** de ce composé et lister ses **éléments de symétrie**.

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π, définie, sur $]-\pi, \pi]$, par : $f(x) = x$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.

5. Quelle est **la nature de la série** $\sum(2n)!(\frac{x^n}{(n!)^2})$? Déterminer son **rayon de convergence**.

6. **Compléter** : $\overline{10101}^2 + \overline{125}^{10} = \overline{\bullet\bullet\bullet}^8$

Exercice II. (5 POINTS) :

Soit $\oplus$ la **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par : $a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ (pour tout a, b dans $\mathbb{R}$).

1. **Comparer** $a \oplus b$ et $b \oplus a$ puis **conclure** ;

2. **Montrer** que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un **groupe Abelien** ;

3. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$ l'**application** définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
   Montrer que f est un **isomorphisme de groupes**.

4. Soit la $\odot$ **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par $a \odot b = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Est ce que** $(\mathbb{R}, \odot)$ est un

groupe ?

Exercice III. (5 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

1. **Vérifier** que $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

2. **Étudier la convergence** de **la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;

3. Soit $F_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que peut-on dire de la **convergence simple** de la suite de fonctions $(F_n(x))_n$?

4. **Calculer la somme partielle** $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$ puis **étudier la convergence** de **la série** $\sum F_n(x)$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. **Page1/1**

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

- *Rattrapage* —*vendredi 21 février 2020*—-2019 - 2020

Exercice I. (10 POINTS). (*Les **six** questions sont **indépendantes***) :

1. Soit (E_p) **l'équation**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donnée par : $(E_p) \quad 10u - 14v = p$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$. Vérifier que $(2, 1)$ est une **solution particulière** de (E_6), puis déterminer l'**ensemble des solutions** de (E_6). Que peut-on dire de l'**ensemble des solutions** de (E_5) ?

2. **Déterminer** : $PGCD(3280; 984)$ et $PPCM(3280; 984)$ (en détaillant les calculs).

3. Soit ABC un **triangle équilatéral** du plan et O son centre. Déterminer l'ensemble des **trois rotations** (dans le plan) qui laissent **invariants** les points A, B et C. **Dresser la table de composition** avec la loi **"suivi de"**, que peut-on déduire ?

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π, définie, sur $]-\pi, 0[$, par : $f(x) = -\frac{1}{2}$ et, sur $]0, \pi]$, par : $f(x) = \frac{1}{2}$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.

5. Déterminer les **rayons de convergence** des séries entières définies par : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z^n}{\sqrt{n+1}}$.

6. En détaillant les calculs, **Compléter** : $\overline{100001}^2 + \overline{1003}^4 = \overline{\bullet\bullet\bullet}^8$.

Exercice II. (5.5 POINTS) :

Soit $\jmath$ le nombre complexe (dans $\mathbb{C}^*$) donné par : $\jmath = e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$ et U_3 le sous ensemble de $\mathbb{C}^*$ défini par :

$$U_3 = \left\{1, \jmath, \jmath^2\right\}$$

1. **Calculer** $\jmath^3$ et déduire que $\jmath^4 = \jmath$;

2. **Dresser la table** de multiplication de $(U_3, \times)$ ($\times$ est la multiplication habituelle dans $\mathbb{C}$) ;

3. Vérifier que $(U_3, \times)$ est **un groupe**. Est-il **Abelien** ?

4. Le groupe $(U_3, \times)$ admet-il des **sous groupes** ? lesquels ?

Exercice III. (4.5 POINTS) :

Soit $(f_n(x))_n$ **la suite de fonction** définie par : $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2 \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \geq 1.$

1. Déterminer les **expressions** suivantes et préciser leurs natures : $f_1(x)$, $f_2(-\frac{1}{2})$, $f_n(0)$ et $f_n(-1)$;
2. **Étudier la convergence simple** de **la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;
3. Soit $g_n(x) = f_n(x) - x^2$. **Calculer** $|g_n(n)|$ puis $\lim_{n\to+\infty} |g_n(n)|$. Que peut-on dire de la **convergence uniforme** de la suite de fonctions $(f_n(x))_n$?

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. **Page1/1**

Chapitre 2

ANNALES DES EXAMENS - SOLUTIONS

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE CONTINU JANVIER 2015 CORRECTION

— EXERCICE 1 (4 POINTS) :

Écrivons le nombre $x = \overline{A3}^{11}$ suivant les bases 10, 2, 16 et 4 :

Base $11 \to$ base 10. On calcule :

$$x = \overline{A3}^{11} = 10 \times 11^1 + 3 \times 11^0 = 110 + 3 = 113 = \overline{113}^{10}.$$

Base $10 \to$ base 2. Divisions successives par 2 :

$$113 = 56 \times 2 + 1$$
$$56 = 28 \times 2 + 0$$
$$28 = 14 \times 2 + 0$$
$$14 = 7 \times 2 + 0$$
$$7 = 3 \times 2 + 1$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc :

$$x = \overline{1110001}^2$$

Base $2 \to$ base 16.

On a $16 = 2^4$. On décompose l'écriture en base 2 par des blocs de 4 chiffres en ajoutant un zéro à gauche :

$$x = \underbrace{0111}\underbrace{0001} = \underbrace{\ 7\ }\underbrace{\ 1\ } = \overline{71}^{16}$$

Base $16 \to$ base 4.

On a $4^2 = 16$. On écrit chaque chiffre de l'écriture en base 16 suivant la base 4 :

$$x = \underbrace{\ 7\ }\underbrace{\ 1\ } = \underbrace{13}\underbrace{01} = \overline{1301}^4$$

— EXERCICE 2 (4.5 POINTS) :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$U_n = \frac{2}{n^2+n}$$

1. Étudions la nature de la série de terme général U_n :

   La série de terme général U_n est à termes positifs et on a :

$$\frac{U_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{n^2+n} \times \frac{n^2}{1} = \frac{2n^2}{n^2+n}$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2$$

   D'après le critère d'équivalence : la série de terme général U_n est de même nature que la série de Reimann de terme général $\frac{1}{n^2}$ qui convergente ($\alpha = 2 > 1$).

   La série de terme général U_n converge.

2. Trouvons a et b tels que $\frac{2}{n^2+n} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n}$:

   On a :

$$\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n} = \frac{an+bn+b}{n^2+n} = \frac{2}{n^2+n}$$

   Donc : $b = 2$ et $a + b = 0 \Longrightarrow b = 2$ et $a = -2$

3. Calculons :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

   On a :

$$U_k = \frac{-2}{k+1} + \frac{2}{k}$$

$$k = 1 \Longrightarrow U_1 = \frac{-2}{1+1} + \frac{2}{1}$$

$$k = 2 \Longrightarrow U_2 = \frac{-2}{2+1} + \frac{2}{2}$$

$$k = 3 \Longrightarrow U_3 = \frac{-2}{3+1} + \frac{2}{3}$$

   .

   .

$$k = n-1 \Longrightarrow U_{n-1} = \frac{-2}{n-1+1} + \frac{2}{n-1}$$

$$k = n \Longrightarrow U_n = \frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n}$$

   En additionnant les égalités et en simplifiant, nous obtenons :

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_{n-1} + U_n = \frac{-2}{n+1} + 2$$

et

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 2$$

4. Pour la série de terme général $V_n = -\frac{2}{n^2+n}$ (termes non positifs), nous avons :

$$|V_n| = \frac{2}{n^2+n} = U_n$$

Donc, la série de terme général V_n est absolument convergente et par conséquent elle est convergente.

— EXERCICE 3 (7 POINTS) :

1. La décomposition en facteurs premiers de 26 et 33 :

$$26 = 2 \times 13 \text{ et } 33 = 3 \times 11$$

2. Calcul :

$PGCD(26, 33) = 2^0 \times 3^0 \times 11^0 \times 13^0 = 1$ et $PPCM(26, 33) = 2^1 \times 3^1 \times 11^1 \times 13^1 = 26 \times 33 = 858$

3. Algorithme d'Euclude :

R0	33	26	7	5	2	1
R1	26	7	5	2	1	0
U0	1	0	1	-3	4	-11
U1	0	1	-3	4	-11	26
V0	0	1	-1	4	-5	14
V1	1	-1	4	-5	14	-33
Q	1	3	1	2	2	
R	7	5	2	1	0	
U	1	-3	4	-11	26	
V	-1	4	-5	14	-33	

Donc :

$$-11 \times 33 + 14 \times 26 = 1$$

Soit : $u_0 = -11$ et $v_0 = -14$

4. Soit (E) l'équation d'inconnus U et V entiers relatifs tels que : $33U - 26V = 3$;
Donnons une solution particulière (U_0, V_0) de (E) :
On a :

$$33u_0 - 26v_0 = 1$$

On multipliant cette égalité par 3, on obtient :

$$33(3u_0) - 26(3v_0) = 3$$

Une solution particulière de (E) est donnée par : $U_0 = 3u_0 = -33$ et $V_0 = 3v_0 = -42$;

5. Soit (U, V) la solution générale de (E), On a :

$$33U - 26V = 3$$

et

$$33U_0 - 26V_0 = 3$$

La soustraction des deux égalités donne :

$$33(U - U_0) - 26(V - V_0) = 0$$

soit :

$$33(U - U_0) = 26(V - V_0)$$

6. Calcul modulaire modulo 33 (33 et 26 sont premiers entre eux) :

$$\overline{26}\overline{(V - V_0)} = \overline{33(U - U_0)} = 0 \Longrightarrow \overline{V - V_0} = \overline{26}^{(-1)} \times 0 = 0 \Longrightarrow V = V_0 + 33k$$

Calcul modulaire modulo 26 (33 et 26 sont premiers entre eux) :

$$\overline{33}\overline{(U - U_0)} = \overline{26(V - V_0)} = 0 \Longrightarrow \overline{U - U_0} = \overline{33}^{(-1)} \times 0 = 0 \Longrightarrow U = U_0 + 26k$$

Donc :

$$S = \{(-33 + 26k, -42 + 33k), k \in \mathbb{Z}\}$$

— EXERCICE 4 (4.5 POINTS) :
Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes différents de 0. $(\mathbb{C}^*, \times)$ menu de la multiplication habituelle :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' - bb' = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$

est un groupe dont l'élément neutre est 1. On définit le sous ensemble H de $\mathbb{C}^*$ par :

$$H = \{-1, 1, -i, i\}$$

1. Construisons la table de multiplication de H :

$\times$	-1	1	$-i$	i
-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	$-i$	i
$-i$	i	$-i$	-1	1
i	$-i$	i	1	-1

2. H est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, car :

   - Lélément neutre de $(\mathbb{C}^*, \times)$ appartient à H $(1 \in H)$;

- Le produit de deux éléments de H appartient aussi à H (D'après la table de multiplication, le produit prend les valeurs -1 1, $-i$ et i) ;
- Le symétrique de chaque élément de H est encore dans H (le symétrique de $x \in H$ est y tel que $x \times y = 1$ et les symétriques des éléments de H sont donnés par : $1 \to 1$, $-1 \to -1$, $i \to -i$ et $-i \to i$)

3. Soit $f : (\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ l'application telle que :
$$f(z) = f(a+ib) = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$
Montrons que f est un morphisme de groupes : On a :
$$f(1) = f(1+0i) = |1| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$
et
$$f(z \times z') = f((a+ib)\times(a'+ib')) = f(aa'-bb'+i(ab'+ba')) = \sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}$$
$$f(z\times z') = \sqrt{a^2a'^2 - 2aba'b' + b^2b'^2 + a^2b'^2 + 2aba'b' + b^2a'^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2}$$
$$f(z\times z') = \sqrt{a^2(a'^2+b'^2) + b^2(a'^2+b'^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2} = f(z)\times f(z')$$
et f est morphisme de groupes.

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
RATTRAPAGE MARS 2015 DURÉE : 1H30

— EXERCICE 1 (5 POINTS) :

1. Rappeler la règle d'Alembert pour l'étude de la convergence des séries numériques à termes positifs;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $U_n = \frac{n!}{n^n}$
   Expliquer pourquoi on peut utiliser la règle d'Alembert pour étudier la convergence de la série de terme général U_n;
3. Montrer que la série de terme général U_n converge;
4. Pourquoi la série de terme général $V_n = 1 + \frac{1}{n}$ diverge?

— EXERCICE 2 (4 POINTS) :

1. Écrire le nombre $x = 125$ suivant la base $b = 4$;
   Divisions successives de 125 par 4.
2. Déduire de 1. l'écriture de x suivant la base $b' = 16$;
   Utilisation de la méthode base 4 $\rightarrow$ base 16=4^2
3. L'écriture binaire de x est donnée par $\overline{y1111z1}^2$, Déterminer y et z.
   Utilisation de la méthode base 4=2^2 $\rightarrow$ base 2 puis comparaison du résultat obtenu avec $\overline{y1111z1}^2$ pour déduire x et y.

— EXERCICE 3 (6 POINTS) : Le tableau suivant présente les étapes de calcul de l'Algorithme d'Euclude :

R_0	21	?	1
R_1	10	?	?
u_0	1	?	?
u_1	?	?	-10
v_0	?	?	?
v_1	?	?	21
Q	2	10	NA
R	1	0	NA
u	?	?	NA
v	?	?	NA

1. Recopier et compléter le tableau en remplissant les cases vides (mentionnées par ?);

R0	21	10	1
R1	10	1	0
U0	1	0	1
U1	0	1	-10
V0	0	1	-2
V1	1	-2	21
Q	2	10	
R	1	0	
U	1	-10	
V	-2	21	

2. Donner $PGCD(21, 10)$ et calculer $PPCM(21, 10)$;
   $PGCD(21, 10) = 1$ et $PPCM(21, 10) = PGCD(21, 10) \times |21 \times 10| = 210$
3. Donner U_0 et V_0 tels que $-21U_0 + 10V_0 = 1$;
   Algorithme $\rightarrow 1 \times 21 + (-2) \times 10 = 1$ donc $U_0 = -1$ et $V_0 = -2$
4. Soit (E) l'équation d'inconnus U et V entiers relatifs tels que $-21U + 10V = 7$;
   Donner une solution particulière puis la solution générale de (E).
   L'équation précédente multipliée par 7 $\rightarrow -21(7U_0) + 10(7V_0) = 7$ la solution particulière $(-7, -14)$
   la solution generale s'obtient en écrivant :
   $$-21(U - 7U_0) + 10(V - 7V_0) = 0$$
5. (Question Bonus +1.5 Point) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :
   $$6x = 9\ mod(15)$$
   Méthode décrite dans le cours;
   $PGCD(6, 15) = 3$ divise 9 donc l'equation à 3 solutions pour les déterminer en écrit :
   $$3(2x - 3) = 0mod(15)$$

$2x - 3$ est diviseur de zéro, donc égal à 0 5 ou 10.

— EXERCICE 4 (5 POINTS) :

Soit :

$$\mathbb{M}_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R} \text{ tels que } ad - bc \neq 0 \right\}$$

l'ensemble des matrices carrées de dimension 2 dont le déterminant est non nul. $(\mathbb{M}_2^*, \times)$ menu de la multiplication matricielle habituelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

est un groupe dont l'élément neutre est la matric unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit H le sous ensemble de $\mathbb{M}_2^*$ défini par :

$$H = \{A, B, C, D, E, I\}$$

1. Recopier et compléter la table de multiplication de H en remplissant les cases vides (mentionnées par ?) ;

×	A	B	C	D	E	I
A	I	?	D	?	B	A
B	?	I	?	A	C	B
C	E	?	I	?	A	C
D	B	C	A	?	?	D
E	?	I	?	A	D	E
I	A	B	C	D	E	I

   Présenter les calculs détaillés.

   Produits de deux matrices à effectuer

2. H est-il un sous groupe de $(\mathbb{M}_2^*, \times)$? Justifier votre réponse ;

   Vérification à partir du tableau complété :

   l'Element neutre de $(\mathbb{M}_2^*, \times)$ appartient à H

   La multiplication est interne à H (dans toutes les cases, il y a que les elements de H)

   Le symétrique de chaque élément de H est dans H aussi $(M_1 \times M_2 = I)$

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
CONTRÔLE CONTINU JANVIER2016 DURÉE : 1H30

EXERCICE 1 (3.5 POINTS) :

Répondre aux trois questions suivantes en **n'utilisant pas plus d'une seule fois** chaque méthode (parmi les quatres méthodes de transformation d'écritures entre les différentes bases).

1. Vérifier que le nombre $X = \overline{122}^{10}$ s'écrit suivant la base Octale comme suit : $X = \overline{172}^{8}$;

$$122 = 15 \times 8 + 2$$
$$15 = 1 \times 8 + 7$$
$$1 = 0 \times 8 + 1$$

   Donc : $\overline{122}^{10} = \overline{172}^{8}$
   Autre méthode :

$$\overline{172}^{8} = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 64 + 56 + 2 = 122$$

2. L'écriture binaire de X est donnée par $\overline{111yz10}^{2}$. Déterminer y et z ;
   On ne peut pas utiliser la méthode utilisée dans 1.
   Comme $8 = 2^3$, on utilise $b^k \to b$

$$\overline{172}^{8} = \underbrace{1}\underbrace{7}\underbrace{2} = \underbrace{001}\underbrace{111}\underbrace{010} = \overline{1111010}^{2}$$

   Donc : $y = 1$ et $z = 0$.
3. Écrire X suivant la base $b = 4$.
   Comme $4 = 2^2$, on utilise $b \to b^k$

$$\overline{1111010}^{2} = \underbrace{01}\underbrace{11}\underbrace{10}\underbrace{10} = \underbrace{1}\underbrace{3}\underbrace{2}\underbrace{2} = \overline{1322}^{4}$$

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

Soit (E_n) l'équation d'inconnus U et V nombres entiers relatifs et de paramètre $n \in \mathbb{N}$:

$$(E_n) \qquad nU + 14V = 6$$

1. Montrer qu'une écriture modulaire de (E_4) est donnée par :

$$(Eqt) \qquad \overline{2}.\overline{V} = \overline{2} \qquad (mod\ 4)$$

On a :

$$(E_4) \qquad 4U + 14V = 6 \Rightarrow \overline{4U + 14V} = \overline{6}(mod4) \Rightarrow \overline{4} \times \overline{U} + \overline{14} \times \overline{V} = \overline{6}(mod4)$$

Or $4 = 4 \times 1 + 0 \Rightarrow \overline{4} = \overline{0}(mod\ 4)$, $14 = 4 \times 3 + 2 \Rightarrow \overline{14} = \overline{2}(mod\ 4)$ et $6 = 4 \times 1 + 2 \Rightarrow \overline{6} = \overline{2}(mod\ 4)$, donc :

$$(Eqt) \qquad \overline{2}.\overline{V} = \overline{2} \qquad (mod\ 4)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation modulaire (Eqt) ;

On a $PGCD(2, 4) = 2$ et 2 divise 2 donc l'équation admet deux solutions et on a :

$$(Eqt)\overline{2}.\overline{V} = \overline{2} \Rightarrow \overline{2}.\overline{V} - \overline{2} = 0 \Rightarrow \overline{2}(\overline{V} - \overline{1}) = 0$$

Déterminons les diviseurs de $0(mod4)$: on a $\overline{2}.\overline{0} = \overline{0}$ et $\overline{2}.\overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$, donc :

$$(\overline{V} - \overline{1} = \overline{0}) \text{ ou } (\overline{V} - \overline{1} = \overline{2})$$

Soit :

$$(\overline{V} = \overline{1}) \text{ ou } (\overline{V} = \overline{3})$$

et :

$$S = \{4k + 1, 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$$

3. Le tableau suivant présente les étapes de calcul de l'Algorithme d'Euclude :

R_0	14	6	2
R_1	6	?	?
u_0	1	?	1
u_1	?	?	?
v_0	?	?	-2
v_1	?	?	?
Q	2	?	NA
R	2	0	NA
u	?	?	NA
v	?	?	NA

a. Recopier et compléter le tableau en remplissant les cases vides (mentionnées par ?) ;

R_0	14	6	2
R_1	6	2	0
u_0	1	0	1
u_1	0	1	-3
v_0	0	1	-2
v_1	1	-2	7
Q	2	3	NA
R	2	0	NA
u	1	-3	NA
v	-2	7	NA

b. Donner $PGCD(14,6)$ et calculer $PPCM(14,6)$;
L'Algorithme donne $PGCD(14,6) = 2$ et on a :

$$PPCM(14,6) = \frac{|14 \times 6|}{PGCD(14,6)} = 42$$

4. Utiliser le tableau précédent pour trouver une solution particulière de (E_6).
L'Algorithme donne

$$PGCD(14,6) = 2 = 1 \times 14 + (-2) \times 6$$

Donc

$$6 \times (-2) + 14 \times (1) = 2 \Rightarrow 6 \times (-2 \times 3) + 14 \times (1 \times 3) = 2 \times 3$$

Soit :

$$6 \times (-6) + 14 \times (3) = 6$$

Une solution particulière de (E_6) est donnée par $U_0, V_0) = (-6, 3)$.

EXERCICE 3 (5.5 POINTS) :

Soit H_5 le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par :

$$H_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

On considère sur H_5 la loi $\oplus$ définie, pour i et j dans H_5, par :

$$i \oplus j = \begin{cases} i + j & \text{si } i + j < 5 \\ i + j - 5 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la loi $\oplus$ est associative sur H_5 ;
Il s'agit de montrer que :

$$(i \oplus j) \oplus k = i \oplus (j \oplus k)$$

On a :

$$i \oplus j = \begin{cases} i+j & \text{si } i+j<5 \Rightarrow (i\oplus j)\oplus k = (i+j)\oplus k \\ & = \begin{cases} i+j+k & \text{si } i+j+k<5 \\ i+j+k-5 & \text{si } 5\leq i+j+k<10 \\ \text{aucun autre cas} & \text{n'est possible} \end{cases} \\ i+j-5 & \text{si } i+j\geq 5 \Rightarrow (i\oplus j)\oplus k = (i+j-5)\oplus k \\ & = \begin{cases} i+j-5+k & \text{si } i+j-5+k<5 \Rightarrow 5\leq i+j+k<10 \\ i+j-5+k-5 & \text{si } i+j-5+k\geq 5 \Rightarrow i+j+k\geq 10 \\ \text{aucun autre cas} & \text{n'est possible} \end{cases} \end{cases}$$

En résumé :

$$(i\oplus j)\oplus k = \begin{cases} i+j+k & i+j+k<5 \\ i+j+k-5 & 5\leq i+j+k<10 \\ i+j+k-10 & i+j+k\geq 10 \end{cases}$$

D'autre part :

$$j \oplus k = \begin{cases} j+k & \text{si } j+k<5 \Rightarrow i\oplus (j\oplus k) = i\oplus (j+k) \\ & = \begin{cases} i+j+k & \text{si } i+j+k<5 \\ i+j+k-5 & \text{si } 5\leq i+j+k<10 \\ \text{aucun autre cas} & \text{n'est possible} \end{cases} \\ j+k-5 & \text{si } j+k\geq 5 \Rightarrow i\oplus (j\oplus k) = i\oplus (j+k-5) \\ & = \begin{cases} i+j+k-5 & \text{si } i+j+k-5<5 \Rightarrow 5\leq i+j+k<10 \\ i+j+k-5-5 & \text{si } i+j+k-5\geq 5 \Rightarrow i+j+k\geq 10 \\ \text{aucun autre cas} & \text{n'est possible} \end{cases} \end{cases}$$

En résumé :

$$i\oplus (j\oplus k) = \begin{cases} i+j+k & i+j+k<5 \\ i+j+k-5 & 5\leq i+j+k<10 \\ i+j+k-10 & i+j+k\geq 10 \end{cases}$$

Donc la loi $\oplus$ est associative.

2. Construire la table de la loi $\oplus$ sur H_5 ;

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

3. Montrer que $(H_5, \oplus)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

   Vérifions que $(H_5, \oplus)$ est un groupe :

- Loi interne ; H_5 est un ensemble fini et sur la table il n'y a que les éléments de H_5 ;
- Loi associative : d'après 1.
- Élément neutre : sur la table on constate que $0 \oplus i = i \oplus 0 = 0$ pour tout $i \in H_5$;
- Symétrique : sur la table on constate que chaque élément à un symétrique :

$$0 \to 0,\ 1 \to 4,\ 2 \to 3,\ 3 \to 2,\ 4 \to 1$$

$(H_5, \oplus)$ est commutatif car $i \oplus j = j \oplus i$ en effet :

$$i + j = j + i \text{ et } i + j - 5 = j + i - 5$$

EXERCICE 4 (6 POINTS) :

Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = (x-2)(3-x)^n$:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[2, 4[$;
   On a $(3-x)^n$ est une suite géométrique de raison $3-x$ et $x \in [2, 4[\Rightarrow 3 - x \in]-1, 1]$, on en déduit :
   - $x \in]2, 4[\Rightarrow 3 - x \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(3-x)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
   - Pour $x = 2$, on a $f_n(2) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(2) = 0$

   Donc la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[2, 4[$ vers $f(x) = 0$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[2, 4[$;
   On a :
   $$\sup_{x\in[0,2[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(4 - \frac{1}{n}) - f(4 - \frac{1}{n})| = |f_n(4 - \frac{1}{n})| \text{ car } x_0 = 4 - \frac{1}{n} \in [2, 4[$$
   Or,
   $$|f_n(4-\frac{1}{n})| = |(4-\frac{1}{n}-2)(3-(4-\frac{1}{n}))^n| = |(2-\frac{1}{n})(-1+\frac{1}{n})^n| = |(2-\frac{1}{n})(-1)^n(1-\frac{1}{n})^n| = (2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^n$$
   et
   $$\sup_{x\in[2,4[} |f_n(x) - f(x)| \geq (2 - \frac{1}{n})e^{n\log(1-\frac{1}{n})} = (2 - \frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}$$
   Finalement :
   $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2[} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} (2 - \frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$$

3. Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[2, 4[$;
   Étudions la série, des sommes partielles, définie par :
   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(x-2)(3-x)^k = (x-2)\sum_{k=0}^{k=n}(3-x)^k = (x-2)\frac{1-(3-x)^{n+1}}{1-(3-x)} = 1-(3-x)^{n+1}$$

En calculant la somme des termes de la suite géométrique de raison $(3-x)$ (pour $x \neq 2$).
Donc :
• $x \in]2,4[\Rightarrow 3-x \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(3-x)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$
• Pour $x = 2$, on a $f_n(2) = 0$, $S_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$
La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $[2,4[$ vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{f(x)=1} & x \neq 2 \\ \text{f(2)=0} \end{cases}$$

Les fonctions $f_n(x)$ sont continues, la fonction f n'est pas contenue alors **la convergence n'est pas uniforme**

4. Soit $2 < a < 3$, Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge normalement sur $[a,3]$ vers une fonction qu'on note $f(x)$;

   $x \in [a,3] \Rightarrow a \leq x \leq 3$ et $-3 \leq -x \leq -a \Rightarrow 0 < a-2 \leq x-2 \leq 1$ et $0 \leq (3-x)^n \leq (3-a)^n$

   et
   $$0 \leq f_n(x) \leq (3-a)^n \Rightarrow |f_n(x)| \leq (3-a)^n$$

   Or, la série numérique de terme général $(3-a)^n$ est une série géométrique convergente $(0 < 3-a < 1)$ et donc la série de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur $[a,3]$.
5. Expliquer pourquoi on peut écrire :
   $$\int_a^3 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^3 f_n(x)dx$$

   La série de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente et donc uniformément convergente. Par conséquent, on a :
   $$\int_a^3 f(x)dx = \int_a^3 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^3 f_n(x)dx$$

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
RATTRAPAGE FÉVRIER 2016 DURÉE : 1H30
M. FERRAHI

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

Soient $X = \overline{101101}^2$, $Y = \overline{146}^{10}$ et $Z = \overline{10ab}^2$.

1. Donner l'écriture de $X+Y$ dans la base octale ($b = 8$), en déduire son écriture binaire ($b = 2$) ;

   On a : $X = \overline{101101}^2 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 32+8+4+1 = \overline{45}^{10}$

   Donc :

$$X+Y = 45+146 = \overline{191}^{10} = 23\times 8+7$$

$$23 = 2\times 8+7$$

$$2 = 0\times 8+2$$

   On en déduit :

$$X+Y = \overline{277}^8$$

   D'autre part, $8 = 2^3$ et on a :

$$X+Y = \overline{277}^8 = \underbrace{2}\,\underbrace{7}\,\underbrace{7} = \underbrace{010}\,\underbrace{111}\,\underbrace{111} = \overline{10111111}^2$$

2. Déterminer a et b sachant que $Y - Z = \overline{88}^{16}$.

   Il faut écrire tous les nombres dans la même base, On a :

$$Z = \overline{10nm}^2 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + n\times 2^1 + m\times 2^0 = 8+2n+m$$

$$\overline{88}^{16} = 8\times 16^1 + 8\times 16^0 = 128+8 = 136$$

   Donc :

$$146-(8+2n+m) = 136 \Longrightarrow 2n+m = 2 \Longrightarrow n = 1 \text{ et } m = 0 \text{ car } n, m = 0 \text{ ou } 1$$

EXERCICE 2 (8 POINTS) :

A titre de rappel, l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence (modulo n) est constitué des restes possibles de la division Euclidienne d'un entier quelconque par n. En plus, $\mathbb{Z}_n$ est l'ensemble des classes non nulles : $\mathbb{Z}_n = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \neq \overline{0}\}$.

La multiplication modulaire est définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour deux calasses $\overline{x}$ et $\overline{y}$, par :

$$\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{x \times y} = \text{ Reste de la division Euclidienne de } x \times y \text{ par } n$$

1. Montrer que la loi $\otimes$ est associative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; On a :

$$(\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z} = \overline{x \times y} \otimes \overline{z} = \overline{(x \times y) \times z} \text{ reste de la division de } (x \times y) \times z \text{ par } n$$

$$\overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z}) = \overline{x} \otimes \overline{y \times z} = \overline{x \times (y \times z)} \text{ reste de la division de } x \times (y \times z) \text{ par } n$$

Or, la multiplication est associative dans $\mathbb{Z}$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ On en déduit :

$$(\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z} = \overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z})$$

2. Dresser la table de $(\mathbb{Z}/5.\mathbb{Z}, \otimes)$ et vérifier que $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$ est un groupe ;

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

D'après le table précédente, en supprimant la ligne et la colonne correspondant à $\overline{0}$, en constate :

- La loi $\otimes$ est interne à $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$ car tous les éléments dans le tableau sans dans $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$
- $\overline{1}$ est élément neutre pour la loi $\otimes$ car $\overline{1} \otimes \overline{x} = \overline{x} \otimes \overline{1} = \overline{x}$ (pour $\overline{x} = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$
- Chaque élément à un symétrique dans $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$: $\overline{1} \longrightarrow \overline{1}$, $\overline{2} \longrightarrow \overline{3}$, $\overline{3} \longrightarrow \overline{2}$ et $\overline{4} \longrightarrow \overline{4}$.

3. Est ce que $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ est un groupe ? Justifier la réponse ;

0n a :

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

$(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ n'est pas un groupe car des éléments n'ont pas de symétrique (d'après le tableau : $\overline{2}$, $\overline{4}$ et $\overline{3}$)

4. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donnée par $6U + 5V = 8$:

   a. Vérifier qu'une écriture modulaire de (E) est donnée par : (E_1) $\overline{5}\overline{V} = \overline{2}$ modulo 6, puis résoudre (E_1) dans $\mathbb{Z}$;
   On a :

$$(E) \quad 6U + 5V = 3 \Rightarrow \overline{6} \otimes \overline{U} + \overline{5} \otimes \overline{V} = \overline{3} \text{ modulo } 6 \Rightarrow \overline{5} \otimes \overline{V} = \overline{2} \text{ modulo } 6 \Rightarrow (E_1)$$

   On a $PGCD(5, 6) = 1$ et $\overline{5}^{-1} = \overline{5}$ (d'après le tableau) alors, l'équation (E_1) admet une seule solution donnée par :

$$\overline{V} = \overline{5}^{-1} \otimes \overline{2} = \overline{10} = \overline{4} \text{ modulo } 6$$

   Soit :

$$S_1 = \{4 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$$

   b. Donner une équation (E_2) représentant une écriture modulaire (modulo 5) de E, puis préciser les solutions de (E_2) ; On a :

$$(E) \quad 6U+5V = 3 \Rightarrow \overline{6}\otimes\overline{U}+\overline{5}\otimes\overline{V} = \overline{3} \text{ modulo } 5 \Rightarrow \overline{6}\otimes\overline{U} = \overline{3} \text{ modulo } 5 \Rightarrow (E_2) \quad \overline{1}\otimes\overline{U} = \overline{3} \text{ modulo } 5$$

   L'équation (E_2) admet une seule solution donnée par :

$$\overline{U} = \overline{3} \text{ modulo } 5$$

   Soit :

$$S_2 = \{3 + 5k', k' \in \mathbb{Z}\}$$

   c. Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).
   D'après ce que précède, la solution de (E) est donnée par :

$$S = \{(3 + 5k', 4 + 6k), k, k' \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 3 (7 POINTS) :

Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = (1 - 2x)(2x)^n$:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
   On a $(2x)^n$ est une suite géométrique de raison $2x$ et $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow 2x \in]-1, 1]$, on en déduit :
   • $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\Rightarrow 2x \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(2x)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
   • Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $f_n(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{2}) = 0$
   Donc la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vers $f(x) = 0$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$;
On a :
$$\sup_{x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|f_n(x)-f(x)|\geq|f_n(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n})-f(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n})|=|f_n(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n})|\text{ car }x_0=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n}\in]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$$
Or,
$$|f_n(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n})|=|(1-2(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n}))(2(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n}))^n|=|(2-\frac{1}{n})(-1+\frac{1}{n})^n|=|(2-\frac{1}{n})(-1)^n(1-\frac{1}{n})^n|$$
$$|f_n(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2n})|=(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^n$$
et
$$\sup_{x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|f_n(x)-f(x)|\geq(2-\frac{1}{n})e^{n\log(1-\frac{1}{n})}=(2-\frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}$$
Finalement :
$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|f_n(x)-f(x)|\geq\lim_{n\to+\infty}(2-\frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}=2e^{-1}=\frac{2}{e}>0$$
Donc, la suite de fonction ne converge pas uniformément vers f.
3. Montrer que la série de terme général $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$;
Étudions la série, des sommes partielles, définie par :
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}f_k(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(1-2x)(2x)^k=(1-2x)\sum_{k=0}^{k=n}(2x)^k=(1-2x)\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-(2x)}=1-(2x)^{n+1}$$
En calculant la somme des termes de la suite géométrique de raison $(2x)$ (pour $x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$). Donc :
• $x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\Rightarrow 2x\in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(2x)^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=1$
• Pour $x=\frac{1}{2}$, on a $f_n(\frac{1}{2})=0$ et $S_n(\frac{1}{2})=0$ et $\lim_{n\to+\infty}S_n(\frac{1}{2})=0$
Donc la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ vers :
$$\begin{cases} f(x)=1 & x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \\ f(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$$
Les fonctions $f_n(x)$ sont continues, la fonction f n'est pas contenue alors **la convergence n'est pas uniforme** sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.
4. Est ce que la série de terme général $(f_n)_n$ converge normalement sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$? sur $[-\frac{1}{4},a]$ avec $a\in]-\frac{1}{4},0[$? Justifier.
La convergence ne peut pas être normale sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ car elle n'est pas uniforme (car :

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme)
D'autre part, pour $x \in [-\frac{1}{4}, a]$ (avec $a \in]-\frac{1}{4}, 0[$), on a :

$$x \in [-\frac{1}{4}, a] \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2x \leq 2a \text{ et } 1-2a \leq 1-2x \leq 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ avec } 1 \leq 1-2a \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (2a)^2 \leq (1-2a)(2a)^n \leq (1-2x)(2x)^n \leq \frac{3}{2}(2a)^n \Rightarrow |f_n(x)| \leq u_n = \frac{3}{2}(2a)^n$$

Or, la série numérique :

$$\sum u_n = \sum \frac{3}{2}(2a)^n = \frac{3}{2}\sum (2a)^n \text{ est convergente car géométrique de raison } 2a \text{ et } |2a| < 1$$

On en déduit que la série $\sum f_n(x)$ est normalement convergente.

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE —lundi 13 février 2017—Correction—2016 - 2017

Exercice 1 (3.5 POINTS) :

Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées :

$$N_1 = \overline{A1}^{16} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \overline{105}^{10}$$

Écrire $N = N_1 + N_2$ suivant les bases binaire ($b = 2$), hexadécimale ($b = 16$) et la base $b = 4$.

On a :

$$N = N_1 + N_2 = \overline{A1}^{16} + \overline{105}^{10} = 10 \times 16^1 + 1 \times 16^0 + 105 = 161 + 105 = 266$$

et :

$266 = 133 \times 2 + 0 \qquad 133 = 66 \times 2 + 1 \qquad 66 = 33 \times 2 + 0 \qquad 33 = 16 \times 2 + 1$

$16 = 0 \times 2 + 0 \qquad 8 = 4 \times 2 + 0 \qquad 4 = 2 \times 2 + 0 \qquad 2 = 1 \times 2 + 0 \qquad 1 = 0 \times 2 + 1$

Donc :

$$N = \overline{100001010}^2$$

D'autre part, on a $16 = 2^4$ et :

$$N = \overline{\underbrace{0001}\underbrace{0000}\underbrace{1010}}^2 = \overline{10A}^{16}$$

Finalement, on a $16 = 4^2$ donc :

$$N = \overline{\underbrace{1}\ \underbrace{0}\ \underbrace{A}}^{16} = \underbrace{01}\ \underbrace{00}\ \underbrace{22} = \overline{10022}^4$$

Ou autrement ($4 = 2^2$) :

$$N = \overline{\underbrace{01}\ \underbrace{00}\ \underbrace{00}\ \underbrace{10}\ \underbrace{10}}^2 = \overline{10022}^4$$

Exercice 2 (5 POINTS) :

1. Définir $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dresser la table de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \times)$; $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo 6 c'est à dire l'ensemble des restes possibles de la division d'un entier relatif par 6 :

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5},\right\}$$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

2. Exécuter l'algorithme d'Euclide généralisé pour écrire le $PGCD(6, 15)$ comme combinaison entière de 6 et 15 ; On a :

R0	**15**	**16**	**3**
R1	**6**	**3**	**1**
U0	**1**	**0**	**1**
U1	**0**	**1**	**-5**
V0	**0**	**1**	**-2**
V1	**1**	**-2**	**11**
Q	**2**	**5**	
R	**3**	**1**	
U	**1**	**-5**	
V	**-2**	**11**	

$$3 = PGCD(6, 15) = PGCD(15, 6) = 1 \times 15 + (-2) \times 6 = -2 \times 6 + 1 \times 15$$

3. Soit (E_p) l'équation d'inconnus (x, y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, avec p un paramètre entier, donnée par :

$$(E_p) \qquad p.x + 15y = 9$$

a. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation (E_0) ;

$$p = 0 \Rightarrow (E_0) : \; 15y = 9 \; (modulo \; 6)$$

On a $PGCD(15, 6) = 3$ et 3 divise 9 donc (E_0) admet 3 solutions :

$$(E_0) \Rightarrow \overline{3}(\overline{5}y - \overline{3}) = \overline{0} \Rightarrow \overline{3} \text{ et } (\overline{5}y - \overline{3}) \text{ sont des diviseurs de } \overline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{5}y - \overline{3} = 0 \Rightarrow \overline{5}y = \overline{3} \Rightarrow y = \overline{5}^{-1}\overline{3} = \overline{5} \times \overline{3} = \overline{15} = \overline{3} \\ \overline{5}y - \overline{3} = \overline{2} \Rightarrow \overline{5}y = \overline{5} \Rightarrow y = \overline{5}^{-1}\overline{5} = \overline{5} \times \overline{5} = \overline{25} = \overline{1} \\ \overline{5}y - \overline{3} = 4 \Rightarrow \overline{5}y = \overline{7} \Rightarrow y = \overline{5}^{-1}\overline{7} = \overline{5} \times \overline{5} = \overline{35} = \overline{5} \end{cases}$$

Nous pouvons aussi réduire l'équation avant de faire les calculs : (E_0) : $\overline{3}y = \overline{3}$ et appliquer la même méthode.

b. Donner une **solution particulière** de (E_6). On a :

$$3 = -2 \times 6 + 1 \times 15 \Rightarrow 3 = 6 \times (-2) + 15 \times (1) \Rightarrow 9 = 6 \times (-6) + 15 \times (3)$$

Une solution particulière est donnée par : $(-6, 3)$.

4. Donner la décomposition en facteurs premiers du $PPCM(6, 15)$.
On a :
$$PPCM(6, 15) = \frac{6 \times 15}{PGCD(6, 15)} = \frac{90}{3} = 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit $U_{\sqrt{2}}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$U_{\sqrt{2}} = \left\{ x_n^m = n + m\sqrt{2} \text{ tel que } n \text{ et } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe dont l'élément neutre est 0 et le symétrique de $x \in \mathbb{R}$ est $(-x)$.

1. Montrer que $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un groupe Abelien (commutatif) ;
Loi interne :

$$x_n^m + x_{n'}^{m'} = n + m\sqrt{2} + n' + m'\sqrt{2} = n + n' + (m + m')\sqrt{2} = x_{n+n'}^{m+m'} \in U_{\sqrt{2}}$$

Associativité :
L'addition est associative sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $U_{\sqrt{2}}$:

$$x_n^m + (x_{n'}^{m'} + x_{n''}^{m''}) = (x_n^m + x_{n'}^{m'}) + x_{n''}^{m''} = x_{n+n'+n''}^{m+m'+m''}$$

Élément neutre : On a $0 = x_0^0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in U_{\sqrt{2}}$ et :

$$x_n^m + x_0^0 = x_0^0 + x_n^m = x_{n+0}^{m+0} = x_n^m$$

Symétrique de x_n^m est x_{-n}^{-m}

$$x_{-n}^{-m} = (-n) + (-m)\sqrt{2} \in U_{\sqrt{2}} \text{ et } x_n^m + x_{-n}^{-m} = n + m\sqrt{2} + (-n) + (-m)\sqrt{2} = 0 = x_0^0$$

Donc : $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un groupe. En plus :

$$x_n^m + x_{n'}^{m'} = x_{n+n'}^{m+m'} = x_{n'+n}^{m'+m} = x_{n'}^{m'} + x_n^m$$

Donc : $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un groupe commutatif.

2. Montrer **directement** que $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un **sous-groupe** de $(\mathbb{R}, +)$;
On a $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in U_{\sqrt{2}}$ et soit x_n^m et $x_{n'}^{m'}$ dans $U_{\sqrt{2}}$ alors :

$x_{-n'}^{-m'}$ et le symétrique de $x_{n'}^{m'}$ et $x_n^m + x_{-n'}^{-m'} = n + m\sqrt{2} + (-n') + (-m')\sqrt{2} = n - n' + (m - m')\sqrt{2} \in U_{\sqrt{2}}$

Donc : $(U_{\sqrt{2}}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3. Soit $\phi : (U_{\sqrt{2}}, +) \to (U_{\sqrt{2}}, +)$ l'application telle que :

$$\phi(x_n^m) = \phi(n + m\sqrt{2}) = n - m\sqrt{2}$$

Montrer que ϕ est un morphisme de groupe. Est ce que ϕ est un isomorphisme ?
soit x_n^m et $x_{n'}^{m'}$ dans $U_{\sqrt{2}}$ alors :

$$\phi(x_n^m+x_{n'}^{m'}) = \phi(n+m\sqrt{2}+n'+m'\sqrt{2}) = \phi((n+m)+(n'+m')\sqrt{2} = (n+m)-(n'+m')\sqrt{2}$$

$$= n - m\sqrt{2} + n' - m'\sqrt{2} = \phi(n + m\sqrt{2}) + \phi(n' + m'\sqrt{2}) = \phi(x_n^m) + \phi(x_{n'}^{m'})$$

Donc ϕ est un morphisme de groupe. D'autre part :

$$Ker\phi = \left\{x_n^m \in U_{\sqrt{2}} \text{ tel que } \phi(x_n^m) = n - m\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n = m = 0\right\} = \left\{x_0^0 = 0\right\}$$

et :

$$n + m\sqrt{2} = n - (-m)\sqrt{2} = \phi(n + (-m)\sqrt{2}) \Rightarrow Im\phi = U_{\sqrt{2}}$$

ϕ est une bijection et aussi isomorphisme de $U_{\sqrt{2}}$ vers $U_{\sqrt{2}}$.

4. Vérifier que la multiplication est une loi interne sur $(U_{\sqrt{2}}, \times)$; On a :

$$x_n^m\times x_{n'}^{m'} = (n+m\sqrt{2})(n'+m'\sqrt{2}) = nn'+nm'\sqrt{2}+mn'\sqrt{2}+2mm' = (nn'+2mm')+(nm'+mn')\sqrt{2} \in U$$

Donc la loi est interne.

5. Sachant que $1 = x_1^0 \in U_{\sqrt{2}}$ est l'élément neutre de $(U_{\sqrt{2}}, \times)$, calculer :

$$x_1^2 \times x_n^m = (1 + 2\sqrt{2})(n + m\sqrt{2})$$

On a :

$$x_1^2 \times x_n^m = (1 + 2\sqrt{2})(n + m\sqrt{2}) = (n + 4m) + (m + 2n)\sqrt{2}$$

Que peut-on déduire pour $1 + 2\sqrt{2}$ et $(U_{\sqrt{2}}, \times)$?
Si $n + m\sqrt{2}$ est le symétrique de $1 + 2\sqrt{2}$ alors $(n + 4m) + (m + 2n)\sqrt{2} = 1$ c'est à dire :

$$n + 4m = 1 \text{ et } m + 2n = 0 \Rightarrow n = 1 - 4m \text{ et } 2 - 7m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{7} \text{ impossible}$$

Donc : $1 + 2\sqrt{2}$ n'admet pas de symétrique et $(U_{\sqrt{2}}, \times)$ n'est pas un groupe.

Exercice 4 (5.5 POINTS) : Les deux questions sont indépendantes.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la **suite de fonctions** $(f_n(x))_n$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

Si $x \neq 0$ alors;

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx} = 0$$

Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$
Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$
D'autre part :

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{1+n^2x^2}| = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

et;

$$x_0 = \frac{1}{n} \in [0, +\infty[\text{ et } f_n(x_0) = \frac{n\frac{1}{n}}{n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq f(x_0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} > 0$$

Donc, la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

2. Étudier la **convergence simple** sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ puis sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ de la **série de fonctions** de terme général $g_n(x)$ donné par :

$$g_n(x) = (x)^{3n}$$

$g_n(x) = x^{3n} = (x^3)^n$ est une suite géométrique et la somme partielle est donnée par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (x^3)^n = \frac{1-(x^3)^{n+1}}{1-x^3}$$

Si $x \in [0, 1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x^3}$ et la série converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$
pour $x = 1$ on a

$$S_n(1) = \sum_{k=0}^{k=n} (x^3)^n = \sum_{k=0}^{k=n} 1 = n + 1 \to +\infty$$

Donc, la série ne converge pas sur $[0, 1]$.
Que peut-on dire de la convergence de cette même série sur $[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$?
On a :

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq a^3 \Rightarrow 0 \leq (x^3)^n \leq (a^3)^n$$

Comme $a^3 \in]0, 1[$, la série numérique de terme général $(a^3)^n$ converge (car géométrique avec raison entre 0 et 1)
On en déduit que la série de fonctions de terme général $g_n(x)$ converge normalement (par conséquent uniformément et simplement) sur $[0, a]$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

RATTRAPAGE — lundi 13 mars 2017 — 2016 - 2017

Exercice 1 (4 POINTS) :

Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées :

$$N_1 = \overline{103}^4 \qquad \text{et} \qquad N_2 = \overline{B0}^{16}$$

1. Écrire $N = N_1 + N_2$ suivant les bases **Binaire** ($b = 2$) et **Octale** ($b = 8$) ;

$$N_1 = \overline{103}^4 = 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 3 \times 4^0 = 16 + 3 = \overline{19}^{10}$$

$$N_2 = \overline{B0}^{16} = 11 \times 16^1 + 0 \times 16^0 = 176 + 0 = \overline{176}^{10}$$

Donc : $N = N_1 + N_2 = 19 + 176 = \overline{195}^{10}$ et on a :

$$195 = 97 \times 2 + 1$$

$$97 = 48 \times 2 + 1$$

$$48 = 24 \times 2 + 0$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

$$12 = 6 \times 2 + 0$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Soit :

$$N = \overline{11000011}^2$$

D'autre part, $8 = 2^3$ donc :

$$N = \overline{\underbrace{011}\,\underbrace{000}\,\underbrace{011}}^2 = \overline{303}^8$$

2. Trouver x et y tels que $N = \overline{xy}^{16}$ dans la base **Hexadécimale** (x et y sont alphanumériques).
On a $16 = 2^4$ et :

$$N = \overline{\underbrace{1100}_{=12 \to C}\,\underbrace{0011}_{=3}}^2 = \overline{C3}^{16}$$

Donc : $x = C$ et $y = 3$.

Exercice 2 (5 POINTS) :

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ des nombres 28 et 31, trouver alors deux nombres entiers relatifs u et v tels que $31u - 28v = 1$ puis résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(Eqt1) \qquad 31u - 28v = 100$$

On a :

R0	31	12	7	5	2	1
R1	12	7	5	2	1	0
U0	1	0	1	-1	2	-5
U1	0	1	-1	2	-5	12
V0	0	1	-2	3	-5	13
V1	1	-2	3	-5	13	-31
Q	2	1	1	2	2	
R	7	5	2	1	0	
U	1	-1	2	-5	12	
V	-2	3	-5	13	-31	

Donc :

$$1 = PGCD(31, 12) = -5 \times 31 + 13 \times 12 \Rightarrow -5 \times 31 - (-13) \times 12$$

$$(Eqt2) : -500 \times 31 - (-1300) \times 12 = 100 \Rightarrow u_0 = -500, \qquad v_0 = -1300$$

$Eqt1 - Eqt2 \Rightarrow$:

$$31(u + 500) - (v + 1300)12 = 0 \Rightarrow 31(u + 500) = (v + 1300)12$$

On a :

31 divise $28(v + 1300)$ et premier avec 12 donc, il divise $v + 1300 \Rightarrow v = -1300 + 31k$

12 divise $31(u + 500)$ et premier avec 31 donc, il divise $u + 500 \Rightarrow u = -500 + 12k$

$$S = \{(-500 + 12k, -1300 + 31k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(Eqt2) \qquad 2x = 6$$

On a $PGCD(2, 8) = 2$ donc l'équation admet deux solutions, et :

$$\overline{2}\overline{x} = \overline{6} \ \ (mod 8) \Rightarrow \overline{2}\overline{x} - \overline{6} = 0 \Rightarrow \overline{2}(\overline{x} - \overline{3}) = 0$$

Or, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on a :

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$

On en déduit que : $\overline{x} - \overline{3} = \overline{0}$ ou $\overline{x} - \overline{3} = \overline{4}$ et :

$$S = \{\overline{3}, \overline{7}\}$$

Exercice 3 (6 POINTS) : Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les **fonctions affines** définies sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f_{a,b}(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont des FONCTIONS et non pas des nombres réels ! !
On rappelle que **la somme de deux fonctions** f et g, notée $f \oplus g$, est définie par :

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

1. Déterminer $f_{a,b} \oplus f_{c,d}$ puis vérifier que $\oplus$ est **une loi de composition interne** sur $\mathcal{F}$;

$$(f_{a,b} \oplus f_{c,d})(x) = f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) = ax + b + cx + d = (a+c)x + (b+d) = f_{a+c,b+d}(x)$$

On a : $f_{a,b} \oplus f_{c,d} = f_{a+c,b+d} \in \mathcal{F}$ et la loi est interne.

2. Montrer que la loi $\oplus$ est **associative** sur $\mathcal{F}$;

$$(f_{a,b} \oplus f_{c,d}) \oplus f_{s,t} = f_{a+c,b+d} \oplus f_{s,t} = f_{(a+c)+s,(b+d)+t} = f_{a+c+s,b+d+t}$$

La dernière égalité car la somme $+$ est associative dans $\mathbb{R}$, de la même manière :

$$f_{a,b} \oplus (f_{c,d} \oplus f_{s,t}) = f_{a,d} \oplus f_{c+s,d+t} = f_{a+(c+s),b+(d+t)} = f_{a+c+s,b+d+t}$$

On en déduit que :

$$(f_{a,b} \oplus f_{c,d}) \oplus f_{s,t} = f_{a,b} \oplus (f_{c,d} \oplus f_{s,t}) = f_{a+c+s,b+d+t}$$

et la loi est associative.

3. Montrer que $(\mathcal{F}, \oplus)$ est un **groupe commutatif** ;

La fonction nulle : $f(x) = 0 = 0 \times x + 0 = f_{0,0}(x) \in \mathcal{F}$ et :

$$f_{a,b} \oplus f_{0,0} = f_{a+0,b+0} = f_{a,b} = f_{0+a,0+b} = f_{0,0} \oplus f_{a,b}$$

Donc $f_{0,0}$ est un élément neutre pour $(\mathcal{F}, \oplus)$
On a :

$$f_{-a,-b} \oplus f_{a,b} = f_{-a+a,-b+b} = f_{0,0} \quad f_{a,b} \oplus f_{-a,-b} = f_{a+(-a),b+(-b)} = f_{0,0}$$

Donc, chaque élément $f_{a,b}$ de $\mathcal{F}$ admet un symétrique $(f_{a,b})^{-1} = f_{-a,-b} \in \mathcal{F}$.

Finalement, la loi $\oplus$ est commutative car :

$$f_{a,b} \oplus f_{c,d} = f_{a+c,b+d} = f_{c+a,d+b} = f_{c,d} \oplus f_{a,b}$$

car la somme $+$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

On conclut que $(\mathcal{F}, \oplus)$ est un groupe commutatif.

4. Soit $\mathcal{F}^0$ l'ensemble de toutes les **fonctions constantes** définies sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}^0 = \{f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f_b(x) = b \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(\mathcal{F}^0, \oplus)$ est un **sous groupe** de $(\mathcal{F}, \oplus)$;

Remarquons que si $f_b \in \mathcal{F}^0$ alors $f_b = f_{0,b} \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$ en plus, la loi induite par $\oplus$ sur $\mathcal{F}^0$ est définie par :

$$f_b \oplus f_{b'} = f_{0,b} \oplus f_{0,b'} = f_{0,b+b'} = f_{b+b'}$$

L'élément neutre appartient à $\mathcal{F}$, car $f_{0,0}(x) = 0 = f_0(x)$ et $f_0 \in \mathcal{F}^0$
Soit f_b et $f_{b'}$ deux éléments de $\mathcal{F}^0$, d'après la question précédente, le symétrique de $f_b = f_{0,b}$ est :

$$(f_b)^{-1} = (f_{0,-b})^{-1} = f_{0,-b} = f_{-b}$$

Donc :

$$(f_b)^{-1} \oplus f_{b'} = f_{-b} \oplus f_{b'} = f_{-b+b'} \in \mathcal{F}^0$$

On en déduit que $\mathcal{F}^0$ muni de la loi induite par $\oplus$ est un sous groupe de $(\mathcal{F}, \oplus)$

5. Dans cette question, l'ensemble $\mathcal{F}$ est muni de la loi $\circ$, de **composition des fonctions**, définie par :

$$(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$$

Est ce que la loi $\circ$ est interne sur $\mathcal{F}$? admet-elle un élément neutre ? Est ce que $f_{0,1}$ admet un élément symétrique ? conclure.
Soit $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ dans $\mathcal{F}$, on a :

$$(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d)+b = acx+ad+b = (ac)x+(ad+b) = f_{ac,ad+b}(x) \in$$

Donc la loi $\circ$ est interne sur $\mathcal{F}$
Si $f_{c,d}$ est un élément neutre alors :

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a,b} \Rightarrow f_{ac,ad+b} = f_{a,b} \Rightarrow c = 1 \quad \text{et} \quad d = 0$$

D'autre part, on a :

$$f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \Rightarrow f_{ca,cb+d} = f_{a,b} \Rightarrow c = 1 \quad \text{et} \quad d = 0$$

Donc : $f_{1,0}$ est élément neutre de $(\mathcal{F}, \circ)$.
Supposons que $f_{a,b}$ est le symétrique de $f_{0,1}$ alors :

$$f_{a,b} \circ f_{0,1} = f_{1,0} \Rightarrow f_{a\times 0, a\times 1+b} = f_{1,0} \Rightarrow f_{0,a+b} = f_{1,0}$$

ce qui est impossible car : $f_{1,0}(x) = x$ et $f_{0,a+b}(x) = a + b$. Donc $f_{0,1}$ n'admet pas de symétrique et $(\mathcal{F}, \circ)$ n'est pas un groupe.

Exercice 4 (5 POINTS) :

1. Étudier la convergence **simple et uniforme** de la **suite de fonctions** $(f_n(x))_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

On a :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} = (\frac{1}{1+x^2})^n$$

est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{1+x^2}$, or $1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow |q| \leq 1$. Distinguant deux cas :
Si $x = 0$ alors $q = 1$ et $f_n(0) = 1 \to 1$
Si $x \neq 0$ alors $|q| < 1$ donc $f_n(x) \to 0$
On en déduit que la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1, & \end{cases}$$

D'autre part, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$ et les fonctions $f_n(x)$ sont continues tandis que f n'est pas continue. Le théorème fondamental nous permet de déduire que la suite ne converge pas uniformément vers f.

2. Montrer que, pour $x \neq 0$, la **somme partielle** de **la série de terme général** $g_n(x) = x^2 f_n(x)$ est donnée par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} g_n(x) = x^2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right)$$

On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} g_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^2 f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{k=n} f_n(x) = x^2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right)$$

En utilisant la somme des termes de la suite géométrique $(f_n(x))$ dans la dernière égalité.

3. Étudier la **convergence simple et uniforme** de la **série de fonctions** de terme général $g_n(x)$.
On a, si $x \neq 0$: $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \Rightarrow (\frac{1}{1+x^2})^{n+1} \to 0$ et :

$$S_n(x) = x^2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right) \to x^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right) = 1 + x^2$$

Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 1$, $g_n(0) = 0$ et $S_n(0) = 0$, on en déduit que la série de terme général $g_n(x)$ converge simplement vers la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^2, & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0, & \end{cases}$$

Remarquons que g n'est pas continue en 0 (car $\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \neq g(0) = 0$) et que les fonctions g_n sont continues. Le théorème fondamental (pour les séries) montre que le convergence n'est pas uniforme.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

-CONTRÔLE — *jeudi 18 janvier 2018* — 2017 - 2018

Exercice 1. (7.5 POINTS) :

Soit $(ABCD)$ un carré de centre O.

Dans le plan du carré, on considère les transformations suivantes :

r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r' la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, s la symétrie centrale de centre O et e l'identité.

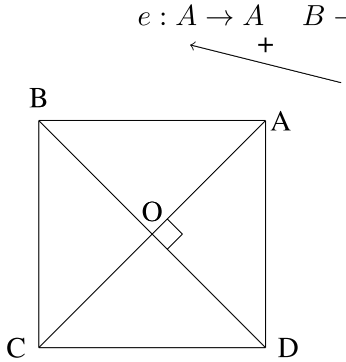
1. Expliciter les 4 transformations en précisant, pour chacune, les images des points A, B, C, D et O ;

$$r : A \to B \quad B \to C \quad C \to D \quad D \to A \quad O \to 0$$

$$r' : A \to D \quad B \to A \quad C \to B \quad D \to C \quad O \to 0$$

$$s : A \to C \quad B \to D \quad C \to A \quad D \to B \quad O \to 0$$

$$e : A \to A \quad B \to B \quad C \to C \quad D \to D \quad O \to 0$$



2. Soit $(T, \circ)$ l'ensemble des quatre transformations muni de **la loi** $\circ$ **de composition des applications**. **Recopier et compléter** la table ci-jointe puis vérifier que $(T, \circ)$ est un groupe. Ce groupe est-il Abélien ? Quel-il est son ordre ?

   Exemple de composition : $r \circ r'$ en commence par appliquer r' puis r :

$$\begin{cases} A \to^{r'} D \to^{r} A \\ B \to A \to B \\ C \to B \to C \\ D \to C \to D \\ O \to O \to O \end{cases}$$

   Donc : $r \circ r' = e$ et de même pour les autres compositions.

$\circ \nearrow$	e	r	r'	s
e	$e \circ e = e$	$e \circ r = r$	r'	$e \circ s = s$
r	$r \circ e = r$	$r \circ r = s$	e	r'
r'	r'	$r' \circ r = e$	s	$r' \circ s = r$
s	$s \circ e = s$	$s \circ r = r'$	r	e

Vérification de la structure de groupe :

La loi est interne d'après la table (tous les éléments sont dans T).

La loi est généralement associative (en particulier sur T).

e est élément neutre (d'après la table) $e \circ r = r \circ e = r$,....

Tout élément admet un symétrique : $e \to e$, $r \to r'$, $r' \to r$, $s \to s$ (d'après la table).

La table est symétrique donc la loi est commutative et le groupe est Abélien. T est un groupe fini de 4 éléments donc son ordre est égal à 4.

3. Déterminer **Tous les sous-groupes** de $(T, \circ)$ (justifier la réponse); L'ordre de tout sous groupe de T divise celui de T qui égal à 4, donc, les sous groupes de $(T, \circ)$ sont d'ordre 1,2 ou 4 :
   Un seul élément $\{e\}$
   deux éléments $\{e, s\}$ car le symétrique de s est aussi s, il n y a aucun autre sous groupe de deux éléments car tout sous groupe doit contenir e,un autre élément et son symétrique !
   Quatre éléments : T.
4. On note $(\mathbb{Z}_5^*, \times)$ le groupe des classes modulo 5 (non nulles) muni de la multiplication.
   Soit $f : (T, \circ) \to (\mathbb{Z}_5^*, \times)$ l'application telle que : $r \mapsto \overline{2}$ $\quad r' \mapsto \overline{4}$ $\quad$ et $\quad s \mapsto \overline{3}$
   Calculer $f(r \circ s)$. Est ce que f est un homomorphism de groupes ?
   $$f(r \circ s) = f(r') = \overline{4}$$
   D'autre part;
   $$f(r) \times f(s) = \overline{2} \times \overline{3} = \overline{6} = \overline{1} \neq \overline{4} = f(r \circ s)$$
   donc f n'est pas un homomorphism de groupes.
5. Le **tétrafluorure de xénon** est le composé chimique de formule XeF_4, il se forme à partir de xénon (Xe) et de fluor (F). Il se présente sous forme d'un solide cristallin incolore et les études chimiques montrent que, dans les conditions normales, la molécule XeF_4 possède une géométrie plane carrée (Les cinq atomes sont dans le même plan et représentent les sommets et le centre d'un carré).
   a. Déterminer **quatre (4) éléments de symétrie** de XeF_4 **dont** un axe de symétrie noté A et un plan de symétrie noté P (Préciser la nature de chaque élément);
      Il y a plusieurs éléments de symétrie :
      Axes de symétrie : C_4 vertical (par rapport au plan de la molécule) passant par Xe, C_2 vertical et passant par Xe, deux axes C_2 horizontaux (dans le plan de la molécule) passant par Xe et deux atomes F situés en diagonale, deux axes C_2 (dans le plan de la molécule) passant par Xe et le milieu du segment définie par deux atomes F;
      Un plan horizontal contenant tous les atomes (le même résultat que l'identité), deux plans verticaux (contenant l'axe principal et deux F) deux plans horizontaux contenant l'axe principal et passant par les milieux des segments définies par deux atomes F,...

   b. Déterminer la composition : A suivi de P.
      Plusieurs résultats possibles suivant le choix de A et de P mais le résultat est impérativement un élément de symétrie !

Exercice 2. *Les trois questions sont indépendantes* (6.5 POINTS) :

1. **Recopier et compléter** les trois transformations entre les différentes bases en présentant les **détails des calculs** :

$$\overline{1B0}^{16} = 1 \times 16^2 + 11 \times 16 + 0 \times 16^0 = \overline{432}^{10}$$

$$432 = 108 \times 4 + 0$$

$$108 = 27 \times 4 + 0$$

$$27 = 6 \times 4 + 3$$

$$6 = 1 \times 4 + 2$$

$$1 = 0 \times 4 + 1$$

Donc :

$$\overline{432}^{10} = \overline{12300}^{4}$$

D'autre part $16 = 4^2$ donc

$$\overline{\underbrace{01}_{1}\ \underbrace{23}_{11 \to B}\ \underbrace{00}_{0}}^{4} = \overline{1B0}^{16}$$

$$\begin{array}{ccc} & \overline{1B0}^{16} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \overline{432}^{\mathbf{10}} & \longrightarrow & \overline{123\mathbf{00}}^{4} \end{array}$$

2. a. **Recopier et compléter** le tableau de l'algorithme généralisé d'Euclude en présentant les détails des calculs et **déduire** les **deux résultats** donnés par cet algorithme ;
   Application de l'algorithme
   Tant que $R_0 > 0$ faire :
   $Q :=$ quotient division de R_0 par R_1
   $R :=$ reste division de R_0 par R_1
   $U := U_0 - Q \times U_1$
   $V := V_0 - Q \times V_1$
   $R_1 := R_0$
   $R_0 := R$
   $U_0 := U_1$
   $U_1 := U$
   $V_0 := V_1$
   $V_1 := V$

R_1	35	20	15	5
R_0	20	15	5	0
u_0	1	0	1	-1
u_1	0	1	-1	4
v_0	0	1	-1	2
v_1	1	-1	2	-7
Q	1	1	3	NA
R	15	5	0	NA
u	1	-1	4	NA
v	-1	2	-7	NA

$$PGCD(35, 20) = 5 = -1 \times 35 + 2 \times 20$$

b. Déterminer $PGCD(20, 35)$ et $PPCM(20, 35)$ en utilisant une autre méthode.

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$25 = 5^2$$

$$PGCD(20, 35) = 5$$

$$PPCM(20, 25) = \frac{20 \times 35}{5} = 140$$

3. Résoudre les **équations modulaires** suivantes :

• Dans $\mathbb{Z}$: (E_1) $2x = 6$ modulo 8

On a $PGCD(2, 8) = 2$ divise 6 donc (3_1) admet deux solutions telles que : $2(x - 3) = 0$, or $2 \times 0 = 0$ et $2 \times 4 = 0$ donc :

$$x = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = 7$$

$$S = \{3 + 8k, 7 + 8k, k \in \mathbb{Z}\}$$

• Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: (E_2) $3t = 4$

On a $PGCD(3, 5) = 1$ donc (E_2) admet une solution unique, or $2 \times 3 = 1$ donc :

$$2 \times 3t = 2 \times 4 \Rightarrow t = 8 = 3$$

donc :

$$S = \{\overline{3}\}$$

Exercice 3. (6 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = x^{2n}$$

1. Étudier **la convergence simple et uniforme** de la **suite de fonctions** $f_n(x)$ sur $[0,1]$;

$$f_n(x) = (x^2)^n$$

Une suite géométrique de raison x^2, il faut distinguer deux cas :
$x = 1$, $f_n(1) = 1 \to 1$
$x \in [0,1[$, $f_n(x) \to 0$
Donc $f_n(x)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1[\,; \\ 1, & x = 1 \end{cases}$
La fonction f n'est pas continue et les f_n sont continues donc la convergence n'est pas uniforme.

2. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** de cette **suite de fonctions** sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$?
La suite f_n converge simplement vers la fonction nulle $g(x) = 0$ (la cas $x = 1$ n'est plus possible) et :

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq a^2 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| = x^{2n} \leq a^{2n} \Rightarrow \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - g(x)| \leq a^{2n} \to 0$$

donc f_n converge uniformément vers g sur $[0,a]$

3. Étudier **la convergence simple** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0,1[$;

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} \to S(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

La série converge simplement sur $[0,1[$ vers $S(x)$

4. Étudier **la convergence uniforme** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0,a[$ avec $a \in]0,1[$;
on a :

$$|f_n(x)| \leq (a^2)^n$$

or $\sum (a^2)^n$ est une série numérique géométrique convergente, on en déduite que la série de terme général $f_n(x)$ converge normalement et par conséquent uniformément sur $[0,a]$ vers $S(x)$

5. Développer la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en **série entière** de x et étudier **le rayon de convergence** de la série obtenue.
On pose : $X = x^2$ et on utilise le développement de la fonction $\frac{1}{1-X}$ pour obtenir que la série entière est : $\sum x^{2n}$ qui converge simplement pour $|x| < 1$ donc le rayon de convergence est $R = 1$

Question facultative (+1 POINT) :

Soit f la fonction impaire 2π-périodique telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,\pi[$. Calculer **les coefficients de Fourier** de f.
Voir TD

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——————*RATTRAPAGE* ——————*mercredi 21 février 2018*——————2017 - 2018

Calculatrices non programmables autorisées (mais l'échange est interdit)
Documents et téléphones portables interdits

Exercice 1. ***Les quatre questions sont indépendantes*** (7 POINTS) :

1. Détailler les transformations suivantes en n'utilisant **qu'une seule fois chacune des quatre méthodes** de transformations :

$$\overline{1F0}^{16} \to \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{4} \to \overline{496}^{\bullet\bullet} \to \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2} \to \overline{7\bullet0}^{\bullet}$$

$$\overline{1F0}^{16=4^2} = \underbrace{1}\underbrace{F}_{=15}\underbrace{0} = \underbrace{01}\underbrace{33}\underbrace{00} = \overline{13300}^{4}$$

$$\overline{13300}^{4} = 1\times 4^4 + 3\times 4^3 + 3\times 4^2 + 0\times 4 + 0\times 0 = 256 + 192 + 48 = \overline{496}^{10}$$

$$496 = 2\times 248+0,\ \ 248 = 2\times 124+0,\ \ 124 = 2\times 62+0,\ \ 62 = 2\times 31+0,\ \ 31 = 2\times 15+1,$$

$$15 = 2\times 7+1,\ \ 7 = 2\times 3+1,\ \ 3 = 2\times 1+1,\ \ 1 = 2\times 0+1$$

$$\overline{496}^{10} = \overline{111110000}^{2} = \underbrace{111}\underbrace{110}\underbrace{000} = \underbrace{7}\underbrace{6}\underbrace{0} = \overline{760}^{8=2^3}$$

2. Soit (E) l'équation de variables entières U et V donnée par : $(E)\ : 820U + 246V = 164$.

   a. Calculer $PGCD(820, 246)$ puis montrer que : $(E) \Leftrightarrow 10U + 3V = 2$;

$$820 = 2\times 2\times 5\times 41 \quad 246 = 2\times 3\times 41 \Rightarrow PGCD(820, 246) = 2\times 41 = 82$$

   82 divise 820, 246 et 164 avec $820 = 10\times 82$, $246 = 3\times 82$ et $164 = 2\times 82$ en réduisant par 82 on a :

$$(E) \Leftrightarrow 10U + 3V = 2$$

   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide donner **une solution particulière** (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
   En tilisant l'algorithme d'Euclide nous avons :

$$PGCD(10, 3) = 1 = 10\times 1 - 3\times 3 \Rightarrow 10\times 2 + 3\times(-6) = 2$$

   Une solution particulière est donnée par : $(2, -6)$

3. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 4 + 3i$ et qu'elle converge pour $z = 3 + 4i$. Quel est son rayon de convergence ?
   La série diverge pour $z = 4 + 3i$ donc $R \leq |z| = |4 + 3i| = 5$ et converge pour $z = 3 + 4i$ donc $R \geq |z| = |3 + 4i| = 5$ et on déduit que $R = 5$.

4. Montrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de $(G,*)$ alors $H_1 \cap H_2$ est aussi un sous-groupe de $(G,*)$.
   L'élément neutre appartient aux deux sous groupes, donc, il appartient à leur intersection $H_1 \cap H_2$
   Soient x et y donc $H_1 \cap H_2$, les deux éléments sont dans chaque sous groupe et donc $x * y$ est dans H_1 et aussi dans H_2 donc : $x * y \in H_1 \cap H_2$.
   Soit x un élément de l'intersection, il appartient à chaque sous groupe et son symétrique x^{-1} appartient à H_1 et à H_2 donc, il appartient à l'intersection. Les trois propriétés sont vérifiées et $H_1 \cap H_2$ est un sous groupe.

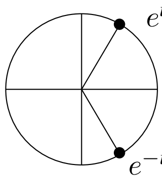
Exercice 2. (7 POINTS) :
Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes, différents de 0, donnés avec leurs **écriture exponentielle** :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{avec} \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ menu de la multiplication habituelle (en particulier : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$) est un **groupe Abelien dont l'élément neutre est** 1. Soit U_n le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$U_n = \left\{ x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1 \right\}.$$

Exemple :



1. Dans cette question on considère le cas : $n = 3$.
   a. Vérifier que $U_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right\}$;

$$U_3 = \{x_0, x_1, x_2\} = \left\{e^0, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}-2\pi}\right\}$$

$$U_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$$

   b. Construire la table de $(U_3, \times)$, vérifier que la loi est interne et que $(U_3, \times)$ est un groupe Abelien;

$\times$	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
1	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$	1
$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$

   D'après la table le produit de chaque deux éléments de U_3 est encore dans U_3 donc la loi est associative.

1 est élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{C}$ et $1 \in U_3$
Chaque élément à un symétrique : $1 \mapsto 1$; $e^{\frac{2i\pi}{3}} \mapsto e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}} \mapsto e^{\frac{2i\pi}{3}}$
La multiplication est commutative dans $\mathbb{C}$ en particulier dans U_3
On déduit que $(U_3, \times)$ est un groupe Abelien. (Nous pouvons aussi vérifier que U_3 est un sous groupe de $(\mathbb{C}, \times)$ et déduire le résultat).

c. Le groupe $(U_3, \times)$ admet-il des sous groupes ? Si oui, lesquels ?
Chaque sous groupe contient au moins l'élément neutre et si il contient un autre élément, il doit contenir son symétrique ! donc U_3 admet deux sous groupes qui sont : $\{1\}$ et U_3 (nous pouvons aussi utilisé le rang égal à 3 et les seuls diviseurs de 3 sont 1 et 3).

d. Soit f et g les applications telles que : $f : (U_3, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ et $g : (U_3, \times) \to (\mathbb{R}, \times)$ avec :
$$f(x_k) = g(x_k) = |x_k|$$
(On rappelle que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module du nombre complexe $z = a + ib$).
Vérifier que f **n'est pas un morphisme**. Que peut-on dire de g ?
Remarquons que tous les éléments de U_3 ont un module égal à 1 :
$$|e^{i\theta}| = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2} = \sqrt{1} = 1$$
Soit x_k et $x_{k'}$ deux éléments de U_3, on a :
$$f(x_k \times x_{k'}) = |x_k \times x_{k'}| = |x_k| \times |x_{k'}| = 1 \times 1 = 1$$
par contre
$$f(x_k) + f(x_{k'}) = 1 + 1 = 2$$
donc f n'est pas un homomorphism (nous pouvons aussi utiliser un contre exemple).
D'autre part :
$g(x_k \times x_{k'}) = |x_k \times x_{k'}| = |x_k| \times |x_{k'}| = g(x_k) \times g(x_{k'})$ donc g est un homomorphism de groupes.

2. Dans cette question on considère le cas général et on se place dans U_n :

a. Montrer que :
$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{\frac{2ik'\pi}{n}} = \begin{cases} e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n}} & \text{si } k + k' \leq n - 1 ; \\ e^{\frac{2i(k+k'-n)\pi}{n}} & \text{si } k + k' \geq n. \end{cases}$$
et déduire que la multiplication $(\times)$ est interne à U_n ;
On a :
$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{\frac{2ik'\pi}{n}} = e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n}}$$
Deux cas à distinguer :
Si $k + k' \leq n - 1$ alors $x_{k+k'} = e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n}} \in U_n$
Si $k + k' \geq n$ alors $e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n}} = e^{\frac{2i(k+k')\pi}{n} - 2\pi} = e^{\frac{2i(k+k'-n)\pi}{n}} = x_{k+k'-n} \in U_n$
Dans les deux cas $x_k \times x_{k'} \in U_n$ donc la loi est interne.

b. Quel est le symétrique de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ dans $(U_n, \times)$;
On a 1 est élément neutre de la multiplication et $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = 1$ avec :

$$e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2\pi-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}} \in U_n$$

c. Vérifier que $(U_n, \times)$ est un groupe Abelien.
La multiplication est associative et commutative sur $\mathbb{C}$ en particulier sur U_n, la loi est aussi interne sur U_n et chaque élément admet un symétrique dans U_n (questions précédentes) et finalement $1 = x_0 \in U_n$
Donc $(U_n, \times)$ est un groupe Abelien.

Exercice 3. (6 POINTS) :
Soit :

$$f_n(x) = x(1-2x)^n$$

1. Calculer $f_n(0)$, $f_n(\frac{1}{2})$ puis montrer que la **suite de fonctions** $f_n(x)$ **convergence simplement** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers une fonction notée f ;

$$f_n(0) = 0 \quad f_n(\frac{1}{2}) = 0$$

On a :
Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
Si $x = \frac{1}{2}$ alors $f_n(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{2}) = 0$
$x \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow (1-2x) \in]0, 1[$ et $\lim_{n\to\infty}(1-2x)^n = 0$ on en déduit : $\lim_{n\to\infty} x(1-2x)^n = 0$
Donc la suite de fonctions converge simplement sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction $f(x) = 0$.

2. On pose $g(x) = |f_n(x) - f(x)|$, montrer que $g'(x) = (1-2x)^{n-1}(1-2x(1+n))$ et déterminer :

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} g(x)$$

Déduire que la **suite de fonctions** $f_n(x)$ **convergence uniformément** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers f ;

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = x(1-2x)^n$$

$$g'(x) = (1-2x)^n - 2nx(1-2x)^{n-1} = (1-2x)^{n-1}(1-2x-2nx) = (1-2x(1+n))(1-2x)^{n-1}$$

g' est de même signe que $(1-2x(1+n))$ donc :
Si $x \leq \frac{1}{2(n+1)}$ alors $(1-2x(1+n)) \geq 0$ et g est croissante
Si $x \geq \frac{1}{2(n+1)}$ alors $(1-2x(1+n)) \leq 0$ et g est décroissante
On en déduit que :
$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} g(x)$=

$$g(\frac{1}{2(n+1)}) = f_n(\frac{1}{2(n+1)}) = \frac{1}{2(n+1)}(1-2\frac{1}{2(n+1)}) = \frac{1}{2(n+1)}\frac{n}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)^2} \to 0$$

Donc : $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ et la suite de fonctions converge uniformément vers f sur $[0, \frac{1}{2}]$

3. On s'intéresse maintenant à l'étude de la **convergence** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$;

   a. Calculer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x)$ (Attention au cas particuliers !) ;
   Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et $S_n(0) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(0) = 0$
   Si $x = \frac{1}{2}$ alors $f_n(\frac{1}{2}) = 0$ et $S_n(\frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(\frac{1}{2}) = 0$
   Si $x \in]0, \frac{1}{2}[$ alors :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x) = S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x(1-2x)^k = x\sum_{k=0}^{k=n}(1-2x)^k = x\frac{1-(1-2x)^{n+1}}{1-(1-2x)} = \frac{1-(1-2x)^{n+1}}{2}$$

   b. Montrer que la **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ **converge simplement** sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers une fonction notée S ;
   Si $x \in]0, \frac{1}{2}[$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-2x)^{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad 0 < 1-2x < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = \lim_{n\to\infty} S_n(\frac{1}{2}) = 0$$

   Donc :

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x \in]0, 1[\end{cases}$$

   d. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** ?
   Les fonctions f_n sont continues alors que la limite $S(x)$ n'est pas continue, on déduit, avec la propriété fondamentale des séries, que la convergence n'est pas uniforme.

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

CONTRÔLE *jeudi 10 janvier 2019* 2018 - 2019

Exercice 1. :

1) Rappeler la forme générale des sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$ et les utiliser pour vérifier que la réunion de deux sous groupes n'est pas généralement un sous groupe.
   Si H est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. La réunion de sous groupes n'est pas généralement un sous groupe : On a $2 \in 2\mathbb{Z}$ et $5 \in 5\mathbb{Z}$ mais $2+5=7$ n'appartient ni à $2\mathbb{Z}$ ni à $5\mathbb{Z}$ et par conséquent, la composition de deux éléments de la réunion n'est pas dans la réunion (la loi n'est pas interne).
2) Donner le développement en série entière de la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{(1-2x)(x-2)}$ (en supposant que le rayon de convergence est donné).
   En utilisant un calcul de décomposition et d'identification, on a :
$$f(x) = \frac{2}{(1-2x)(x-2)} = \frac{-\frac{4}{3}}{1-2x} + \frac{-\frac{2}{3}}{x-2}$$
   Soit :
$$f(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-2x}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})}\right)$$
$$f(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-2x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$$
   Comme $\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$, on déduit que :
$$f(x) = -\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{4}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n)x^n$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{2^{n+2}}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n)x^n$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}(-2^{n+2} + (\frac{1}{2})^n)x^n$$
3) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2]. \end{cases}$ g est une fonction paire et on a pour $s \neq 0$:
$$\mathcal{F}(g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2i\pi st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)(\cos(2\pi st) - i\sin(2\pi st))dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\cos(2\pi st)dt - \frac{i}{4}\underbrace{\int_{-2}^{2}\sin(2\pi st)dt}_{=0} = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2\pi st)}{2\pi s}\right]_{-2}^{2} = \frac{2}{4}\frac{\sin(4\pi s)}{2\pi s} = \frac{\sin(4\pi s)}{4\pi s}$$

Pour $s = 0$:

$$\mathcal{F}(g)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{-2}^{2} dt = 4$$

Donc :

$$\mathcal{F}(g)(s) = \begin{cases} \frac{\sin(4\pi s)}{4\pi s} & s \neq 0\,; \\ \mathcal{F}(g)(0) = 4 & \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer aussi que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(g)$ est prolongeable par continuité à 0 et :

$$\mathcal{F}(g)(s) = \frac{\sin(4\pi s)}{4\pi s}$$

4) Soit (E) l'équation donnée par : $7x - 6y = 11$. Calculer, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, une solution particulière (x_0, y_0) de (E) et déduire que l'ensemble des solutions de (E) s'écrit : $\{(x_0 + 6k, y), k \in \mathbb{Z}\}$ avec $y \in \mathbb{Z}$ à exprimer en fonction de k. Quel est le nombre de solutions qui vérifient $4 \leq x \leq 24$.

Nous avons : $PGCD(7, 6) = 1$ et $7 \times (1) + 6 \times (-1) = 1$ (Nous pouvons appliquer l'algorithme généralisé d'Euclide). Donc :

$$7 \times (1) - 6 \times (1) = 1 \Longrightarrow (E_0) 7 \times (11) - 6 \times (11) = 11$$

une solution particulière est donnée par $(x_0 = 11, y_0 = 11)$.
la soustraction de (E_0) de (E) donne :

$$6(x - 11) - 7(y - 11) = 0 \Longrightarrow 6(x - 11) = 7(y - 11)$$

Nous déduisons que 7 divise $6(x - 11)$ et comme $PGCD(7, 6) = 1$ alors 7 divise $x - 11$ ou encore $x - 11$ est multiple de 7 et nous pouvons écrire :

$$x - 11 = 7k \Longrightarrow x = 11 + 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

De la même manière : 6 divise $7(x - 11)$ et comme $PGCD(7, 6) = 1$ alors 6 divise $y - 11$ ou encore $y - 11$ est multiple de 6 et nous pouvons écrire :

$$y - 11 = 6k \Longrightarrow y = 11 + 6k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions s'écrit :

$$S = \{(11 + 7k, 11 + 6k), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$4 \leq x \leq 24 \Longrightarrow 4 \leq 11 + 7k \leq 24 \Longrightarrow \frac{-7}{7} \leq k \leq \frac{35}{7}$$

7 solutions ($k = -1, 0, ..., 5$).

5) Effectuer successivement les transformations suivantes : $\overline{FA}^{16} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet}^{8} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2}$

$$\overline{FA} = 15 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 250$$

$$250 = 31 \times 8 + 2$$

$$31 = 3 \times 8 + 7$$

$$3 = 0 \times 8 + 3$$

Donc :

$$\overline{FA}^{16} \longrightarrow \overline{372}^{8}$$

D'autre part,

$$\overline{3}^{8} \longrightarrow \overline{011}^{2}$$

$$\overline{7}^{8} \longrightarrow \overline{111}^{2}$$

$$\overline{2}^{8} \longrightarrow \overline{010}^{2}$$

et :

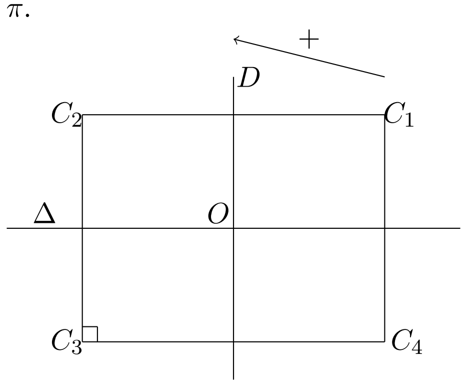
$$\overline{372}^{8} \longrightarrow \overline{11111010}^{2}$$

Conclusion :

$$\overline{FA}^{16} \longrightarrow \overline{372}^{8} \longrightarrow \overline{11111010}^{2}$$

Exercice 2. :

La figure ci-jointe représente une table $(C_1C_2C_3C_4)$ de forme rectangulaire. La droite qui passe par les milieux de $[C_1C_2]$ et $[C_3C_4]$ est notée D, celle qui passe par les milieux de $[C_2C_3]$ et $[C_1C_4]$ est notée Δ et O le point d'intersection de ces deux droites. Par la suite, on considère les quatres transformations suivantes : E la transformation qui laisse chaque coin invariant, S_D et S_Δ les symétries, dans le plan de la table, respectivement par rapport à D et à Δ et R la rotation, dans l'espace, autour de l'axe perpendiculaire au plan de la table passant par O et d'angle π.



1) Expliciter les transformations S_D, S_Δ et R en précisant les images des quatre coins C_1, C_2, C_3 et C_4. A titre d'exemple : $C_1 \overset{E}{\longrightarrow} C_1$ $C_2 \overset{E}{\longrightarrow} C_2$ $C_3 \overset{E}{\longrightarrow} C_3$ $C_4 \overset{E}{\longrightarrow} C_4$;

$$S_D : C_1 \overset{S_D}{\longrightarrow} C_2 \quad C_2 \overset{S_D}{\longrightarrow} C_1 \quad C_3 \overset{S_D}{\longrightarrow} C_4 \quad C_4 \overset{S_D}{\longrightarrow} C_3$$
$$S_\Delta : C_1 \overset{S_\Delta}{\longrightarrow} C_4 \quad C_2 \overset{S_\Delta}{\longrightarrow} C_3 \quad C_3 \overset{S_\Delta}{\longrightarrow} C_2 \quad C_4 \overset{S_\Delta}{\longrightarrow} C_1$$
$$R : C_1 \overset{R}{\longrightarrow} C_3 \quad C_2 \overset{R}{\longrightarrow} C_4 \quad C_3 \overset{R}{\longrightarrow} C_1 \quad C_4 \overset{R}{\longrightarrow} C_2$$

2) Soit G l'ensemble des quatres transformations muni de la loi de composition $*$ définie pour deux transformations, T_1 et T_2 dans G, par :

$T_1 * T_2 =$ La transformation obtenue en appliquant d'abord la transformation T_1 **puis** la transformation T_2

Dresser ta table de composition et vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est ce qu'il est Abelien ?

$* \nearrow$	E	S_D	S_Δ	R
E	E	S_D	S_Δ	R
S_D	S_D	E	R	S_Δ
S_Δ	S_Δ	R	E	S_D
R	R	S_Δ	S_D	E

Loi Interne : D'après la table la composition de deux transformations dans G est encore une transformation appartenant à G

Associativité : On a $T_1 * T_2 = T_2 \circ T_1$ et la composition des transformations est associative

Élément neutre : D'après la table E est élément neutre car : $E * S_D = S_D * E = S_D$, $E * S_\Delta = S_\Delta * E = S_\Delta$, $E * R = R * E = R$ et $E * E = E$

Symétrique : D'après la table tout élément à un symétrique : Chaque élément (E, S_D, S_Δ et R) est symétrique de lui même.

Donc $(G, *)$ est un groupe, en plus, la table est symétrique par rapport à la diagonale principale et $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$ donc :

$(G, *)$ est un groupe Abelien.

3) Déterminer tous les sous-groupes de G.

Le groupe $(G, *)$ est d'ordre 4, tous sous groupe est d'ordre qui divise 4 donc les sous groupes sont d'ordre 1, 2 ou 4

ordre 1 : $\{E\}$

Ordre 2 : $\{E, S_D\}$, $\{E, S_\Delta\}$ et $\{E, R\}$

ordre 4 : G

Exercice 3. :

Soit :

$$f_n(x) = (2x)^{\frac{n}{2}}$$

1. Calculer $f_n(0)$, $f_n(\frac{1}{2})$ et $f_n(1)$;
   $f_n(0) = 0$, $f_n(\frac{1}{2}) = (2 \times \frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ et $f_n(1) = (2 \times 1)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} = (\sqrt{2})^n$
2. Étudier **la convergence simple** de la **suite de fonctions** $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. Déduire que la suite de fonctions converge simplement sur $I = [0, \frac{1}{2}]$ vers une limite f à déterminer. Que peut-on dire de la convergence uniforme sur I ?
   Nous avons : $f_n(x) = (2x)^{\frac{n}{2}} = ((2x)^{\frac{1}{2}})^n$ est une suite géometrique de raison $q = (2x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x}$.
   Sur $\mathbb{R}^+$, trois cas se présentent : $0 \leq q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$
   Cas1 : $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $q = (2x)^{\frac{1}{2}} \in [0, 1[$ et la suite converge vers 0
   Cas2 : $x = \frac{1}{2}$ et $q = (2x)^{\frac{1}{2}} = 1$ et la suite converge vers 1
   Cas3 : $x > \frac{1}{2}$, $2x > 1$, $(2x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x} > 1$ donc la suite géométrique de raison $(2x)^{\frac{1}{2}}$ tend vers $+\infty$.
   Conclusion : la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction :
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}[; \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   Et la convergence n'est pas uniforme car les fonctions f_n sont continues alors que la limite f n'est pas continue.
3. Que peut-on dire de **la convergence uniforme** de cette **suite de fonctions** sur $[0, a]$ avec $a \in]0, \frac{1}{2}[$?
   La suite de fonction converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ et on a :
   $$0 \leq x \leq a \Longrightarrow 0 \leq 2x \leq 2a \Longrightarrow 0 \leq (2x)^{\frac{1}{2}} \leq (2a)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow 0 \leq (2x)^{\frac{n}{2}} \leq (2a)^{\frac{n}{2}}$$
   $$\Longrightarrow \sup_{[0,a]} |f(x) - 0| \leq (2a)^{\frac{n}{2}} \longrightarrow 0 \text{ car } 0 \leq (2a)^{\frac{1}{2}} < 1$$
4. Étudier **la convergence simple** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. Déduire que cette série converge simplement sur un intervalle à préciser ;
   Si $x = \frac{1}{2}$, $f_n(\frac{1}{2}) = 1$ et $S_n(\frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \longrightarrow +\infty$
   Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-(2x)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(2x)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{1-(2x)^{\frac{1}{2}}}$
   Si $x > \frac{1}{2}$, $(2x)^{\frac{1}{2}} > 1$ et $S_n(x)$ diverge.
   Donc, la série converge simplement sur $[0, \frac{1}{2}[$.
5. Étudier **la convergence** de **la série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ sur $[0, a[$ avec $a \in]0, \frac{1}{2}[$;
   $$0 \leq f_n(x) \leq ((2a)^{\frac{1}{2}})^n$$
   La série numérique de terme général $((2a)^{\frac{1}{2}})^n$ converge car elle est une série géométrique de raison $0 \leq ((2a)^{\frac{1}{2}})^n < 1$, donc, la série de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente et par conséquent uniformément et simplement convergente.

6. Exprimer l'intégrale I :

$$I = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{\frac{n}{2}}\, dx$$

La série est uniformément uniforme donc nous pouvons inverser l'ordre des deux opérateurs $\int$ et $\sum$:

$$I = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{\frac{n}{2}}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a (2x)^{\frac{n}{2}}\, dx$$

PAGE 2/2

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——————- RATTRAPAGE —————*mercredi 13 février 2019*—————2018 - 2019

Questions indépendantes (11.5 POINTS) :

1) Étudier la **convergence simple** de **la suite de fonctions** définie par : $f_n(x) = x(1-2x)^n$ sur $[0,1[$.
   On a $(1-2x)^n$ est une suite géométrique de raison $1-2x$ et $x \in [0,1[\Rightarrow 1-2x \in]-1,1]$, on en déduit :
   - $x \in]0,1[\Rightarrow 1-2x \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(1-x)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
   - Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$
   Donc la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f(x) = 0$.

2) Étudier la **convergence de la série de fonctions** du terme général $f_n(x)$ tel que : $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Est ce que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue ? Justifier.
   On a :
   $$|f_n(x)| = |\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$$ terme général d'une série numérique de Reimann convergente $\alpha = 2 > 1$
   La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement (et par conséquent uniformément, absolument et simplement) convergente.
   La fonction $f_n(x)$ est continue pour tout $n > 0$ et la série converge uniformément, d'après la propriété fondamentale sur la continuité, la somme (ou limite) de la série ($f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$)est une fonction continue.

3) Une **série entière** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ **converge** pour $z_0 = 3+4i$ et **diverge** pour $z_1 = 4+3i$. Déterminer son **rayon de convergence**. Que peut on déduire si $z_1 = 6i$?
   On a :
   $$|z_0| \leq R \leq |z_1| \Longrightarrow 5 \leq R \leq 5 \Longrightarrow R = 5$$
   Si $z_1 = 6i$ alors $5 \leq R \leq 6$

4) Déterminer le **développement en série entière** de x la fonction f (On suppose que le rayon de convergence R est donné) : $f(x) = \ln(x^2+2x+1)$.
   On a : $f(x) = \ln(x^2+2x+1) = \ln((x+1)^2) = 2\ln(1+x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2x^n}{n}$
   donc $a_n = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}$

5) Déterminer **la série de Fourier**, sous forme **trigonométrique**, de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ sur $[-\pi,\pi[$.
   La fonction f est impaire dans $A_n = 0$ et en utilisant une intégration par parties, on a :
   $$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + \pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}) = -\frac{4\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1}\frac{4}{n}$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n}\sin(nx)$$

6) Effectuer **les transformations** suivantes (dans **cet ordre** et en **détaillant les calculs**) :

$$\overline{101}^5 = 1\times 5^2 + 0\times 5^1 + 1\times 5^0 = 25+1 = \overline{26}^{10}$$

$$26 = 3\times 8 + 2$$

$$3 = 0\times 8 + 3$$

$$26 = \overline{32}^8$$

$$\overline{32}^{8=2^3} = \underbrace{3}_{}\underbrace{2}_{} = \underbrace{011}_{}\underbrace{010}_{} = \overline{11010}^2$$

$$16 = 2^4 \Longrightarrow \overline{11010}^2 = \underbrace{0001}_{}\ \underbrace{1010}_{=10\longrightarrow A} = \overline{1A}^{16}$$

$$\overline{101}^5 \longrightarrow \overline{26}^{10} \longrightarrow \overline{32}^8 \longrightarrow \overline{11010}^2 \longrightarrow \overline{1A}^{16}$$

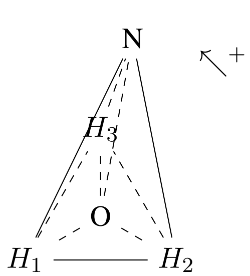
7) Trouver **tous les couples** (s,t) tels que : $PGCD(s,t) = 4$ et $PPCM(s,t) = 56$, $s\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{N}$.

On a : $4 = 2^2$ et $56 = 2^3\times 7$ donc les facteurs premiers présents dans s et t sont 2 (avec puissance minimale 2 et maximale 3) et 7 (avec puissance minimale 0 et maximale 1)

Donc : $s = 4$ et $t = 56$ ou $s = 8$ et $t = 28$

Exercice 2 (8.5 POINTS) :

L'ammoniac est une molécule pyramidale à base triangulaire : l'atome de l'azote (N) est au sommet de la pyramide et les trois atomes d'hydrogène (H) occupent les trois sommets de la base (triangle) notés H_1, H_2 et H_3 et soit O le centre de cette base. On considère les **six éléments de symétrie** ci-après :



T_1 la transformation telle que $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_2$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_1$

T_2 **la rotation** (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Id la transformation qui laisse **invariant** tous les points
R_1 la transformation telle que : $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_1$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_2$
R_2 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_2 et le milieu de $[H_1H_3]$
R_3 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_3 et le milieu de $[H_1H_2]$

1) Quelle est **la nature du triangle** $H_1H_2H_3$? Préciser **la nature** de T_1 puis celle de R_1 ?
Le triangle $H_1H_2H_3$ est équilatéral (liaison Hydrogène-Hydrogène)
T_1 est une rotation (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et R_1 est la réflexion (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe pas N, H_3 et O (et aussi le milieu de $[H_1H_2]$).
2) Expliciter les transformations T_2, Id, R_2 et R_3 en précisant les images des points N, H_1, H_2 et H_3 ;
$T_2 : N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_3$, $H_2 \longrightarrow H_1$ et $H_3 \longrightarrow H_2$
$Id : N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_1$, $H_2 \longrightarrow H_2$ et $H_3 \longrightarrow H_3$
$R_2 : N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_3$, $H_2 \longrightarrow H_2$ et $H_3 \longrightarrow H_1$
$R_3 : N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_2$, $H_2 \longrightarrow H_1$ et $H_3 \longrightarrow H_3$

3) Soit G l'ensemble des **six transformations** muni de, $\circ$, la **loi de composition habituelle**. Compléter la table ci-jointe et vérifier que $(G, \circ)$ est un **groupe non commutatif** ;

(Exemple : $T_1 \circ R_3$, on applique d'abord R_3 puis T_1 :

$$N \longrightarrow N \longrightarrow N$$

$$H_1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_2$$

$$H_2 \longrightarrow H_3 \longrightarrow H_1$$

$$H_3 \longrightarrow H_2 \longrightarrow H_3$$

Nous avons :
La loi est interne à G (tous les éléments de la table sont dans G)
La composition $\circ$ est une loi usuelle associative
D'après la table, Id est un élément neutre $Id \circ T = T \circ Id = T$ pour tout T
Chaque élément admet un symétrique, d'après la table, $Id \longrightarrow Id$, $T_1 \longrightarrow T_2$, $T_2 \longrightarrow T_1$, $R_1 \longrightarrow R_1$, $R_2 \longrightarrow R_2$ et $R_3 \longrightarrow R_3$.
La loi n'est pas commutative car, par exemple, $R_1 \circ R_3 = T_2 \neq R_3 \circ R_1 = T_1$
4) Le groupe $(G, \circ)$ admet-il des **sous-groupes de 3 éléments ? de 4 éléments ?** Si oui, les déterminer.
G est composé de 6 éléments $Card\ G = 6$, donc G admet des sous groupes de 3 éléments mais n'admet pas de sous groupes de quatre éléments.
Un sous groupe de trois éléments est constituer de l'élément neutre et d'un élément et son symétrique : $\{Id, T_1, T_2\}$

Exemple de calcul : $\mathbf{T_1} \circ \mathbf{R_3} = \mathbf{R_2}$

$\circ\nearrow$	Id	T_1	T_2	$\mathbf{R_3}$	R_2	R_1
Id	Id	T_1	T_2	R_3	R_2	R_1
$\mathbf{T_1}$	T_1	T_2	Id	$\mathbf{R_2}$	R_1	R_3
T_2	T_2	Id	T_1	R_1	R_3	R_2
R_3	R_3	R_1	R_2	Id	T_2	T_1
R_2	R_2	R_3	R_1	T_1	Id	T_2
R_1	R_1	R_2	R_3	T_2	T_1	Id

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. **Page1/1**

SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE

——CONTRÔLE ——mercredi 29 janvier 2020——-2019 - 2020

Exercice I. (10 POINTS). (*Les **six** questions sont **indépendantes***) :

1. **Résoudre**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, **l'équation** suivante : $3u - 8v = 6$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.
On a $PGCD(3, -8) = PGCD(3, 8) = 1$ divise 6, donc l'équation admet des solutions. Or, On peu remarquer, que $3 \times 10 - 8 \times 3 = 6$ (sinon, on peut utiliser l'algorithme généralisé d'Euclide). La soustraction des deux égalités donne :
$$3 \times (u - 10) - 8 \times (v - 3) = 0 \Longrightarrow 3 \times (u - 10) = 8 \times (v - 3)$$
On en déduit que 3 divise $8 \times (v - 3)$ et comme 3 ne divise pas 8 alors, d'après le lemme de Cauchy, 3 divise $v - 3$ c'est à dire que $v = 3 + 3k, k \in \mathbb{Z}$. De la même manière : $u = 10 + 8k, k \in \mathbb{Z}$. Donc :
$$S = \{10 + 8k, 3 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Donner **tous** les nombres premiers, p, dont les **carrés** sont inférieurs à 617 ($p^2 \leq 617$), **décomposer** 1200 et 1234 en facteurs premiers puis **calculer** : $PGCD(1200; 1234)$ et $PPCM(1200; 1234)$.
On a : $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$, $27^2 = 729$. Donc, les nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.
D'autre part, on a : $1200 = 2 \times 600$, $600 = 2 \times 300$, $300 = 2 \times 150$, $150 = 3 \times 50$, $50 = 2 \times 25$, $25 = 5^2$, donc :
$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$
et : $1234 = 2 \times 617$, or 617 est un nombre premier (n'est pas divisible pas les nombre premiers de 2 à 23, donc :
$$1200 = 2 \times 617$$
On en déduit :
$$PGCD(1200, 1234) = 2$$
et
$$PPCM(1200, 1234) = \frac{1200 \times 1234}{2} = 740400$$

3. Le **trichlorure de phosphore** est un composé de formule chimique PCl_3 (P : Phosphore, Cl :Chlore). Préciser la **géométrie moléculaire** de ce composé et lister ses **éléments de**

symétrie.
La molécule est sous forme d'une pyramide avec une base $(CL)_1(CL)_2(CL)_3$ sous forme d'un triangle équilatéral et un sommet P, les éléments de symétrique :
Rotation dans la plan de la base $(CL)_1(CL)_2(CL)_3$ (O est le centre du triangle) :
$C_3 = R(O, \frac{\pi}{3})$ Rotation du centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le centre positif : $C_{-3} = R(O, \frac{2\pi}{3}) = R(O, \frac{-\pi}{3})$ Rotation du centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le centre positif ou d'angle $\frac{-\pi}{3}$ dans le sens négatif,
$Id = R(O, \pi)$ l'identité

$$C_3 \begin{pmatrix} P \to P \\ (CL)_1 \to (CL)_2 \\ (CL)_2 \to (CL)_3 \\ (CL)_3 \to (CL)_1 \end{pmatrix} \qquad C_{-3} \begin{pmatrix} P \to P \\ (CL)_1 \to (CL)_3 \\ (CL)_2 \to (CL)_1 \\ (CL)_3 \to (CL)_2 \end{pmatrix} \qquad Id \begin{pmatrix} P \to P \\ (CL)_1 \to CL_1 \\ CL_2 \to CL_2 \\ CL_3 \to CL_3 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport aux plans passant par le sommet P :
σ_1 Réflexion par rapport au plan vertical qui passe par P et les milieu de $[CL_2, CL_3]$
σ_2 Réflexion par rapport au plan vertical qui passe par P et les milieu de $[CL_1, CL_3]$
σ_3 Réflexion par rapport au plan vertical qui passe par P et les milieu de $[CL_1, CL_2]$

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} P \to P \\ CL_1 \to CL_1 \\ CL_2 \to CL_3 \\ CL_3 \to CL_2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 \begin{pmatrix} P \to P \\ CL_1 \to CL_3 \\ CL_2 \to CL_2 \\ CL_3 \to CL_1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 \begin{pmatrix} P \to P \\ CL_1 \to CL_2 \\ CL_2 \to CL_1 \\ CL_3 \to CL_3 \end{pmatrix}$$

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π, définie, sur $]-\pi, \pi]$, par : $f(x) = x$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.
La fonction f est impaire dans $A_n = 0$ et en utilisant une intégration par parties, on a :

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx) = \frac{1}{\pi}(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi})$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + \pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}) = -\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$$

5. Quelle est **la nature de la série** $\sum(2n)!(\frac{x^n}{(n!)^2})$? Déterminer son **rayon de convergence**.
Série entière avec $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\times\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2}\times\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$$

Donc : $R = \frac{1}{4}$

6. **Compléter** : $\overline{10101}^{2} + \overline{125}^{10} = \overline{\bullet\bullet\bullet}^{8}$
   On a :
$$\overline{10101}^{2} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 21$$
   Donc
$$\overline{10101}^{2} + \overline{125}^{10} = 21 + 125 = \overline{146}^{10}$$
   et :
$$146 = 8 \times 18 + 2$$
$$18 = 8 \times 2 + 2$$
$$2 = 8 \times 0 + 2$$
   Finalement :
$$\overline{10101}^{2} + \overline{125}^{10} = \overline{222}^{8}$$

Exercice II. (5 POINTS) :

Soit $\oplus$ la **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par : $a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ (pour tout a, b dans $\mathbb{R}$).

1. **Comparer** $a \oplus b$ et $b \oplus a$ puis **conclure** ;
   $a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$ et $b \oplus a = (b^3 + a^3)^{\frac{1}{3}}$ or, la somme est commutative sur $\mathbb{R}$ donc :
$$b \oplus a = (b^3 + a^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = a \oplus b$$
   On en déduite que la loi $\oplus$ est commutative.

2. **Montrer** que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un **groupe Abelien** ;

   Loi interne : Nous avons pour a et b dans $\mathbb{R}$, a^3, b^3, a^3, b^3, $a^3 + b^3$ et $(a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$ sont respectivement dans $\mathbb{R}$ (en utilisant les propriétés des lois sur $\mathbb{R}$) et par conséquent la loi est interne.

   Élément neutre : On a : $a \oplus 0 = 0 \oplus a = (0^3 + a^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a$ donc 0 est élément neutre.

   Associativité : On a pour a, b et c dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que la somme $+$ est une loi associative sur $\mathbb{R}$:
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + ((b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}})^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + (b^3 + c^3))^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$(a \oplus b) \oplus c = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} \oplus c = (((a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}})^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} = ((a^3 + b^3) + c^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}}$$

Donc, la loi $\oplus$ est associative.
Symétrique : Si b est symétrique de a alors $a \oplus b = b \oplus a = 0$ donc :

$$(a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = 0 \Longrightarrow a^3 + b^3 = 0 \Longrightarrow b^3 = -a^3 \Longrightarrow b^3 = (-a)^3 \Longrightarrow b = -a$$

Donc chaque élément a à un symétrique égal à $-a$.
Conclusion : $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe associatif (ou Abelien).

3. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$ l'**application** définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
Montrer que f est un **isomorphisme de groupes**.

Nous avons $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, \oplus)$ sont deux groupes et pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x+y) = (x+y)^{\frac{1}{3}} = ((x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{\frac{1}{3}})^3)^{\frac{1}{3}} = ((f(x))^3 + (f(y))^3)^{\frac{1}{3}} = f(x) \oplus f(y)$$

Donc f est un morphisme de groupes. Or,

$$Kerf = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x^{\frac{1}{3}} = 0\right\} = \{0\}$$

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{ il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}$$

$$Imf = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^{\frac{1}{3}} = y\right\}$$

$$Imf = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = y^3\right\} = \mathbb{R}$$

Donc f est injective et surjective. Par conséquent f est un isomorphisme.

4. Soit la $\odot$ **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par $a \odot b = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Est ce que** $(\mathbb{R}, \odot)$ est un groupe ?
1 n'as pas de symétrique car $1 \odot b = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}} > 0$. Donc $(\mathbb{R}, \odot)$ n'est pas un groupe.

Exercice III. (5 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

1. **Vérifier** que $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

   On a : $1 + x^2 > 1$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

2. **Étudier la convergence** de **la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;

   La suite de fonctions est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{1+x^2}$, deux cas à distinguer :
   $x = 0 \Longrightarrow q = 1$ et $\lim f_n(x) = 1$

$x \neq 0 \Longrightarrow 0 < q < 1$ donc $\lim f_n(x) = 0$
Donc la suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x=0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que les fonctions $f_n(x)$ sont continues tandis que f n'est pas continue, on en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

3. Soit $F_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que peut-on dire de la **convergence simple** de la suite de fonctions $(F_n(x))_n$?

   Remarquons que $F_n(x) = x^2 f_n(x)$ et par conséquent, $\lim F_n(x) = 0$ et la suite de fonctions $F_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F(x) = 0$.

4. **Calculer la somme partielle** $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$ puis **étudier la convergence** de **la série** $\sum F_n(x)$.

   Si $x \neq 0$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^2 f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{k=n} f_n(x) = x^2 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = x^2 \frac{1-(\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

   Donc : $\lim S_n(x) = x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$ Si $x = 0$, $F_n(x) = 0$ et $S_n(x) = 0 \longrightarrow 0$ Donc : La série de terme général $F_n(x)$ converge simplement vers la fonction S définie par : $S(0) = 0$ et $S(x) = 1 + x^2$. remarquons que les fonctions $F_n(x)$ sont continues tandis que S n'est pas continue (car $\lim(1 + x^2) = 1 \neq S(0)$) par conséquence la convergence ne peut pas être uniforme et par conséquent, elle ne peut pas être normale ! Par contre $F_n(x) > 0$ donc la série est aussi absolument convergente.
   La série est simplement convergente et absolument convergente par contre, elle ne converge pas uniformément et elle ne converge pas normalement.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. `Page1/1`