Université Abdelmalek Essaadi

Faculté des Sciences - Tétouan

Licence Fondamentale Sciences Mathématiques et Applications

Semestre 6 - Schémas numériques pour les EDO

Annales des Examens

Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**

Département de Mathématiques

2022-2023

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.cla.fr

---

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié, Annales des Examens, est destiné aux étudiant du semestre six de la Licence Fondamentale Sciences Mathématiques et Applications, parcours appliqué (SMA6Q) à la Faculté des Sciences de Tétouan.

Ce polycopié est adapté à la filière sus-mentionnée et au contenu disposé chaque année à la Faculté des Sciences de Tétouan et regroupe les sujets des contrôles et des rattrapages, proposés durant les années universitaires de 2014-2015 à 2022-2023, avec des indications ou des solutions détaillées.

Ce travail ne constitue pas une référence complète, le lecteur intéressé peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus profonde.

BOUCHAIB FERRAHI

Chapitre 1

ANNALES DES EXAMENS - SUJETS

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

CONTRÔLE — 05 juillet 2021 — 2020 - 2021

Soit (P) le problème de Cauchy : trouver une fonction $y(.) : [t_0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Rappel. La quadrature de Simpson : $\int_a^b g(t)dt = \frac{b-a}{6}[g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)]$

Exercice 1 (5+8=13 POINTS) :

Supposons que (P) admet une et une seule solution $y(.)$. Soit $h > 0$ un pas temporel, et $(t_i)_i$ la suite, des nœuds, telle que $t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, 2, \cdots$ on note y_j une approximation de $y(t_j)$. Un schéma numérique permettant d'obtenir les valeurs y_i est obtenu après intégration de l'équation différentielle, entre deux nœuds, et l'utilisation d'une formule de quadrature pour exprimer l'intégrale du second membre.

1. Sur l'intervalle $[t_n, t_{n+2}]$:
   a. Utiliser la formule de quadrature du point milieu et écrire le schéma numérique, $SchN_1$, correspondant. Quelle est sa nature ? Compléter $SchN_1$ par un choix adéquat de y_1 et exprimer y_2 ;
   b. Utiliser la formule de quadrature de Simpson et écrire le schéma numérique, $SchN_2$, correspondant. Quelle est sa nature ? Compléter $SchN_2$ par un choix adéquat de y_1. Peut-on exprimer y_2 ;
   c. Proposer une modification du schéma $SchN_2$ pour qu'il devient explicite.

2. Sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$:
   a. Utiliser la formule de quadrature du point milieu et écrire le schéma numérique, $SchN_3$, correspondant (en utilisant l'approximation $y(t_j + \frac{h}{2}) \simeq y_{j+\frac{1}{2}}$) ;
   b. Utiliser la formule de quadrature de Simpson et écrire le schéma numérique, $SchN_4$ correspondant et le présenter sous la forme : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K^{(1)} + 4K^{(2)} + K^{(3)}\right)$ (avec $K^{(1)} = \varphi(t_n, y_n)$) ;
   c. Dans $K^{(2)}$, exprimer $y_{n+\frac{1}{2}}$ en utilisant le schéma d'Euler explicite sur $[t_n, t_n + \frac{h}{2}]$;
   d. Dans $K^{(3)}$, exprimer y_{n+1} en utilisant le schéma d'Euler explicite sur $[t_n + \frac{h}{2}, t_{n+1}]$;
   e. Injecter ces nouvelles expressions dans le schéma $SchN_4$. Le schéma obtenu est-il de Runge-Kutta ? Si oui, donner son tableau de Butcher.

Exercice 2 (1+1.5+2+2=7 POINTS) :

On considère le schéma Runge-Kutta défini par son tableau de Butcher :

$$SchN_\alpha \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \qquad (\alpha \geq \frac{1}{2})$$

1. Reconnaître le cas particulier $\alpha = 1$ et préciser l'ordre de $SchN_{\alpha=1}$;
2. Quel est l'ordre du schéma $SchN_\alpha$?
3. Appliquer $SchN_\alpha$ au problème (P) et exprimer y_{n+1} ;
4. Appliquer $SchN_\alpha$ à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

RATTRAPAGE —— 26 juillet 2021 —— 2020 - 2021

Soit (P) le problème de Cauchy : trouver une fonction $y(.) : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Rappel. Quadrature du trapèze : $\int_a^b g(s)ds = \frac{b-a}{2}\left(g(a) + g(b)\right)$

Exercice 1 (14 POINTS) :

Tout au long de cet exercice, on considère que la fonction f est donnée par :

$$f(t, y) = -\gamma y \qquad \gamma > 0$$

Soit $h > 0$ un pas temporel, et $(t_n)_n$ la suite, des nœuds, telle que $t_n = nh, \quad n = 1, 2, \cdots$ on note y_j une approximation de $y(t_j)$. Un schéma numérique permettant d'obtenir les valeurs y_i est obtenu après intégration de l'équation différentielle, entre deux nœuds, et l'utilisation d'une formule de quadrature pour exprimer l'intégrale du second membre.

1) Vérifier que (P) admet une solution unique et déterminer cette solution.
2) Utiliser la quadrature du trapèze pour formuler le schéma numérique, dit de Crank-Nicolson, permettant d'exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. Déduire l'expression de y_n en fonction de n et vérifier que ce schéma est inconditionnellement A-stable.
3) A partir du schéma du trapèze, et en utilisant un schéma explicite de votre choix, déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il A-stable ?
4) On considère le schéma de Runge-Kutta donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|c} c_1 & c_1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

   a) Expliciter ce schéma et vérifier que : $y_{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma h}{1 + c_1 \gamma h}\right) y_n \qquad n = 0, 1, \cdots ;$
   b) Exprimer y_n en fonction de n et déduire que :
      - Si $c_1 < \frac{1}{2}$ le schéma est A-stable lorsque $\gamma h < \frac{2}{1 - 2c_1}$;
      - Si $c_1 \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement A-stable.
   c) Reconnaître les cas particuliers : $c_1 = 1$ et $c_1 = 0$, donner leurs ordres et étudier la A-stabilité ;
   d) On considère le cas $c_1 = \frac{1}{2}$. Quel est l'ordre de ce schéma ?

Exercice 2 (6 POINTS) :

On considère le schéma RK, dite aussi schéma de Heun à trois étages, défini par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

1. Expliciter ce schéma et exprimer y_{n+1} ;
2. Vérifier que ce schéma est d'ordre, exactement, égale à 3 ;
3. Appliquer ce schéma à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

——CONTRÔLE ——02 juin 2022——-2021 - 2022——

(PC) est le problème de Cauchy formulé comme suit :
Trouver une fonction $x(.)$ bien définie sur son domaine ($[t_0, t_0+T]$ ou $[0, +\infty[$ suivant les cas) telle que :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exercice I (2.5+2=4.5 POINTS) :

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine. On note $P_2(.)$ de g aux points -1, 0 et 1 et on donne la quadrature suivante :

$$I = \int_0^1 g(u)du \simeq \widetilde{I} = \int_0^1 P_2(u)du = \frac{-g(-1) + 8g(0) + 5g(1)}{12}$$

Remarquons que nous interpolons aux points -1, 0 et 1 mais nous intégrons sur $[0, 1]$.
Cette quadrature se généralise à un intervalle $[a, b]$, contenu dans le domaine de g, de la manière suivante :

$$J = \int_a^b g(u)du \simeq \widetilde{J} = \frac{b-a}{12}\left(-g(a-(b-a)) + 8g(a) + 5g(b)\right)$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique et on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ d'amplitude $h = \frac{T}{N}$ avec $t_i = t_0 + ih$ pour $i = 0, 1, \cdots, N$.
   Intégrer l'équation différentielle de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$, puis utiliser la **quadrature** $\widetilde{J}$ pour écrire un **schéma numérique**, (SN), permettant l'approximation de la solution de (PC) (avec $x(t_j) \simeq x_j$).
   Quelle est la nature de ce schéma ? Compléter (SN) par un choix adéquat de x_1. Peut-on exprimer explicitement x_2 ;
2. Peut-on modifier le schéma (SN) pour qu'il devient **explicite** ? Pour qu'il devient à **un seul pas** ?.

Exercice II (5+2.5+3.5=11 POINTS) :

A titre de rappel, un schéma numérique de **Runge-Kutta** de deux étages, noté $(RK-2)$, est généralement donné par son tableau de **Butcher** sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & B \end{array}$$

Avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ une matrice carrée, $C = (c_i)_{i=1,2}$ un vecteur colonne et $B = (b_j)_{j=1,2}$ un vecteur ligne.

1. 1er cas : $(RK-2)$ **explicite d'ordre 2**.
   a. Vérifier que, dans ce cas, le tableau de Butcher peut être exprimé en fonction d'un **seul paramètre** noté β ;
   b. Retrouver les schémas classiques du **point milieu** et de **Heun** (en déterminant β) et rappeler, brièvement, pour chaque schéma, le principe de construction ;
   c. Le schéma de **Ralston** (explicite) est l'un des meilleurs schémas $(RK-2)$ et on peut l'identifier par $b_1 = \frac{1}{4}$.
   Déterminer le paramètre β définissant ce schéma, puis l'expliciter en exprimant x_{n+1};
   d Discuter la A-stabilité du schéma de Ralston ;

2. 2ème cas : Exemple d'un schéma $(RK-2)$ **implicite d'ordre 3**.
   Le schéma de **Radau** est le schéma $(RK-2)$ donné par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   a. Expliciter la méthode est exprimer x_{n+1} ;
   b. Vérifier que la méthode Radau est d'ordre, exactement, égal à 3 ;

3. 3ème cas : $(RK-2)$ semi-implicite
   Un Schéma numérique est dit **semi-implicite** si $a_{ij} = 0$ dès que $j > i$.
   a. Donner le tableau de Butcher d'un schéma $(RK-2)$ semi-implicite (en fonction, seulement, de c_1, c_2, a_{21} et b_2) puis expliciter la méthode et exprimer x_{n+1} ;
   b. Expliquer, dans ce cas, le terme "semi-implicite" ;
   c. Application : $c_1 = 0$, $c_2 = a_{21} = b_2 = \frac{1}{2}$
   Exprimer x_{n+1} en fonction de $f(t_n, x_n)$ et de $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ et déduire que, dans ce cas, le schéma $(RK-2)$ est un schéma habituel défini par une quadrature bien connue (à déterminer).

Exercice III (1+1+1.5+1=4.5 POINTS) :

Dans cet exercice, on suppose que f est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et L la constante de Lipschitz.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $h = \frac{T}{N}$ (nous pouvons supposer que $Lh < 1$). Soit le schéma numérique défini par :

$$\begin{cases} x_0, & \text{fixé} \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_0 + (n+1)h, y_{n+1}) & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

On note : $t_n = t_0 + nh$, $e_n = x_n - x(t_n)$ et $\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

1. Reconnaître ce schéma numérique et donner une interpretation à e_n et ϵ_n ;
2. Montrer que $|e_{n+1}| \leq (1 + \frac{Lh}{1-Lh})(|e_n| + |\epsilon_n|)$;
3. Montrer l'inégalité suivante (par récurrence) :

$$|e_n| \leq e^{\frac{nLh}{1-Lh}}|e_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{Lh}{1-Lh}(n-1-i)}(1 + \frac{Lh}{1-Lh})|\epsilon_i| \quad 0 \leq n \leq N$$

4. Démontrer la convergence de ce schéma numérique :

$$\lim_{N\to+\infty} \lim_{x_0\to x(t_0)} \left(\max_{0\leq n\leq N} |e_n| \right) = 0$$

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE 2/2

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

——————-RATTRAPAGE ——————-28 juin 2022——————2021 - 2022——

(PC) est le problème de Cauchy formulé comme suit :

Trouver une fonction $y(.)$ bien définie sur son domaine ($[t_0, t_0+T]$ ou $[0,+\infty[$ suivant les cas) telle que :

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que (PC) admet une solution unique et on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ d'amplitude $h = \frac{T}{N}$ avec $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, 1, \cdots, N$.

Exercice I (4.5 +4.5=9 POINTS) :

Les deux parties A et B sont indépendantes.

A. Soient $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a-h, a+h])$. On note $P_1(.)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $a-h$ et a (Dont la courbe est la droite qui passe par $(a-h, f(a-h))$ et $(a, f(a))$). Nous utiliserons la quadrature suivante :

$$I = \int_a^{a+h} f(t)dt \simeq \widetilde{I} = \int_a^{a+h} P_1(t)dt$$

Remarquons que l'interpolation est effectuée aux points $(a-h, f(a-h))$ et $(a, f(a))$ tandis que l'intégration est sur $[a, a+h]$.

1. Vérifier que : $\widetilde{I} = \frac{h}{2}(3f(a) - f(a-h))$;
2. Intégrer l'équation différentielle, de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$ et utiliser la quadrature $\widetilde{I}$ pour formuler une relation de recurrence liant les approximations, de la solution du (PC), à quelques noeuds (notation : $y(t_j) \simeq y_j$) ;
   Quelle est la nature de cette relation ? Compléter cette relation par un choix adéquat de y_1 et formuler un schéma numérique permettant l'approximation de la solution de (PC) ;
3. Modifier le schéma précédent pour qu'il devient explicite à un seul pas.

B. La deuxième quadrature de Simpson (dite aussi Simpson $\frac{3}{8}$) est donnée, pour g suffisamment régulière, par :

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)dt &\simeq \frac{b-a}{8}\left(g(a) + 3g(a + \frac{b-a}{3}) + 3g(a + \frac{2(b-a)}{3}) + g(b)\right) \\ &\simeq \frac{b-a}{8}\left(g(a) + 3g(\frac{2a+b}{3}) + 3g(\frac{a+2b}{3}) + g(b)\right) \end{aligned}$$

1. Intégrer l'équation différentielle, de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$ et utiliser la deuxième quadrature de Simpson pour retrouver la formulation numérique donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}\left(\varphi(t_n, y_n) + 3\varphi(t_n + \frac{h}{3}, y(t_n + \frac{h}{3}) + 3\varphi(t_n + \frac{2h}{3}, y(t_n + \frac{2h}{3})) + \varphi(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

2. En utilisant le schéma explicite d'Euler (en choisissant à chaque fois un pas adéquat) exprimer $y(t_n + \frac{h}{3})$, $y(t_n + \frac{2h}{3})$ et y_{n+1} en fonction de $\varphi(t_n, y_n)$, y_n et h. Formuler le schéma numérique obtenu ;
3. Est ce que ce schéma est de Runge-Kutta ? Si oui, donner son tableau de Butcher.

Exercice II (2+2+2=6 POINTS) :

Considérons le schéma explicite, de Runge-Kutta à 3 étages, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ 0 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & 0 & b_2 & b_3 \end{array}$$

On suppose que ce schéma est d'ordre exactement égal à 3.

1. Réduire les coefficients utilisés dans le tableau de Butcher à, au plus, trois paramètres ;
2. Traduire les conditions liées à l'ordre de ce schéma en un système d'équations. Donner une solution particulière de ce système et formuler le schéma associé ;
3. Appliquer ce schéma (question 2.) à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

Exercice III (1+1+1+1+1+1=6 POINTS) :

On considère un réel L et l'équation différentielle donnée, sur $[0, +\infty[$, par :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et } x' = -Lx, \quad L > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{T}{m}$ et $t_k = kh$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$;
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, x_k, en fonction de k ;
3. Donner une condition sur h pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$;
4. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler explicite :

$$\tau_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{h} + L\overline{x}_{k+1}$$

vérifie : $|\tau_k| \leq \frac{x_0 L^2}{2} h$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$;

5. On définit l'erreur $E_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler explicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m-1$:
$$\frac{E_{k+1} - E_k}{h} + LE_{k+1} = \tau_k$$
6. Montrer que :
$$|E_k| \leq |E_0| + T\frac{x_0 L^2}{2}h \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m$$
En déduire que, dans ce cas, le schéma d'Euler explicite converge et d'ordre égal à 1 ;

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. Page 2/2

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

CONTRÔLE — 12 juin 2023 — 2022 - 2023

Exercice I (5 POINTS). Soit le test linéaire standard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Intégrer l'équations différentielle, utiliser la quadrature du trapèze et formuler ainsi le schéma, de Crank-Nicolson, permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n.
2. Étudier la A-Stabilité de ce schéma. Que peut-on dire de sa consistance et sa stabilité ?
3. Appliquer le schéma de Heun et discuter sa A-stabilité.

Exercice II (6 POINTS). On considère le schéma numérique défini par : $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi\left(t_n, y_n, h\right) \\ y_0 = y\left(t_0\right) \end{cases}$

où $\phi(t, y, h) = \alpha k_1(t, y, h) + \beta k_3(t, y, h)$ avec $\begin{cases} k_1(t, y, h) = f(t, y) \\ k_2(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1(t, y, h)\right) \\ k_3(t, y, h) = f\left(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}k_2(t, y, h)\right) \end{cases}$

α et β sont deux nombres réels. $h > 0$, $t_n = nh$ et y_n une approximation de $y(t_n)$.

1. Écrire le tableau de Butcher associé et vérifier qu'il est bien posé. Quelle est la nature de ce schéma ?
2. Quelle relation doit satisfaire α et β pour que le schéma soit consistant ?
3. Déterminer α et β pour que le schéma soit convergent avec une convergence au moins d'ordre 2.
4. Montrer qu'en fait dans ce cas, la convergence est au moins d'ordre 3.

Exercice III (9 POINTS). Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que ce problème admet une solution (exacte) unique et donner cette solution.
2. Soit $h > 0$ un pas de temps, $t_n = nh$ et y_n une approximation de $y(t_n)$. Écrire le schéma d'Euler explicite vérifié par $(y_n)_n$.
3. On pose $v_n = y_n - \frac{1}{5}$, trouver une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
3. En déduire l'expression de v_n puis celle de y_n.
4. En prenant $h = \frac{1}{50}$, calculer y_n et conclure.
5. Que peut-on conclure si on considère le schéma d'Euler implicite.

Exercice IV (3 POINTS). On considère la méthode RK donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Appliquer cette méthode à un test linéaire standard $x'(t) = -Lx(t)$ et déterminer le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.
En déduire que la méthode ne peut pas être A-stable.

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

RATTRAPAGE ——— 08 juillet 2023 ——— 2022 - 2023

Exercice I (3 POINTS). Soit le problème de Cauchy formulé par :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Intégrer l'équations différentielle, utiliser la quadrature du rectangle à droite, formuler le schéma numérique associé à cette quadrature et expliquer pourquoi ce schéma est implicite.
2. Rappeler le principe du schéma d'Euler explicite, formuler x_{n+1} en utilisant ce schéma. Puis, transformer le schéma précédent (question 1), en un schéma explicite.

Exercice II (8 POINTS). Soit $T > 0$ un réel strictement positif. On supposera que la fonction $f(t, y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ et vérifie, par rapport à y, une condition de Lipschitz globale de constante L.
On étudie le schéma numérique de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ défini comme suit :
Soit $0 < h < T$ un pas de temps donné, on pose $t_n = t_0 + nh$ et soit y_n une approximation de $y(t_n)$ avec $y_0 = y(t_0)$ donnée. La suite des approximations $(y_n)_n$ est définie par :

$$(SchN) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \phi\left(x_n, y_n, h\right) \\ \phi(t, y, h) = af(t, y) + bf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + cf(t + h, y + hf(t, y)), \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels compris entre 0 et 1 .

1. Pour quelles valeurs de (a, b, c) retrouve-t-on la méthode d'Euler explicite ? La méthode du point milieu ? La méthode de Heun ?
2. Vérifier que : $|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq \left[(a + b + c)L + bT\frac{L^2}{2} + cTL^2\right] |y_1 - y_2|$
3. Sous quelles conditions le schéma $(SchN)$ converge avec un ordre, au moins, égal à 1 ?
4. Sous quelles conditions le schéma $(SchN)$ converge avec un ordre, au moins, égal à 2 ?
   Dans ce cas, donner une formulation possible de $SchN$(en déterminant (a, b, c)).

Exercice III (5 POINTS). On considère la méthode RK donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ c_3 & -1 & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \frac{1}{6} \end{array}$$

1. Déterminer les paramètres de façon que cette méthode soit d'ordre, au moins, égal à 3.
2. En précisant les notations utilisées, écrire l'algorithme de calcul de cette méthode.

Exercice IV (5 POINTS). Montrer que le problème suivant, (P), admet une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$.

$$(P)\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + t, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Soit $T > 0$ et $(t_i)_{i=0,\cdots,n}$ une subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ ($t_i = ih$). Écrire le schéma d'Euler explicite correspondant au problème (P) (notation : y_n est l'approximation de $y(t_n)$).
2. Soit $u_k = \frac{y_k}{(1-2h)^k}$. En détérminant a_k, montrer que $(u_k)_k$ vérifie la relation de récurrence : $u_{k+1} = a_k + u_k$.
3. En déduire que :

$$u_p = u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**

Chapitre 2

Annales des Examens - Solutions

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

——CONTRÔLE ——05 juillet 2021——2020 - 2021——

Soit (P) le problème de Cauchy : trouver une fonction $y(.)$: $[t_0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Rappel. La quadrature de Simpson : $\int_a^b g(t)dt = \frac{b-a}{6}[g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)]$

Exercice 1 (5+8=13 POINTS) :

Supposons que (P) admet une et une seule solution $y(.)$. Soit $h > 0$ un pas temporel, et $(t_i)_i$ la suite, des nœuds, telle que $t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, 2, \cdots$ on note y_j une approximation de $y(t_j)$. Un schéma numérique permettant d'obtenir les valeurs y_i est obtenu après intégration de l'équation différentielle, entre deux nœuds, et l'utilisation d'une formule de quadrature pour exprimer l'intégrale du second membre.

1. Sur l'intervalle $[t_n, t_{n+2}]$:
   a. (2 Points) Utiliser la formule de quadrature du point milieu et écrire le schéma numérique, $SchN_1$, correspondant. Quelle est sa nature ? Compléter $SchN_1$ par un choix adéquat de y_1 et exprimer y_2 ;
   Après intégration :
   $$y(t_{n+2}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} \varphi(s, y(s))ds = (t_{n+2} - t_n)\varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$
   En utilisant les approximations :
   $$SchN_1 \quad y_{n+2} = y_n + 2h\varphi(t_{n+1}, y_{n+1})$$
   Ce schéma est explicite à deux pas. Pour la compléter, il faut déterminer y_1, par exemple, en utilisant le méthode d'Euler explicite
   $$y_1 = y_0 + h\varphi(t_0, y_0)$$
   $$y_2 = y_0 + 2h\varphi(t_1, y_1) = y_0 + 2h\varphi(t_1, y_0 + h\varphi(t_0, y_0))$$
   b. (2 Points) Utiliser la formule de quadrature de Simpson et écrire le schéma numérique, $SchN_2$, correspondant. Quelle est sa nature ? Compléter $SchN_2$ par un choix adéquat de y_1. Peut-on

exprimer y_2 ;

Après intégration :

$$y(t_{n+2})-y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} \varphi(s,y(s))ds = \frac{t_{n+2}-t_n}{6}\left[\varphi(t_n,y(t_n)) + 4\varphi(t_{n+1},y(t_{n+1})) + \varphi(t_{n+2},y(t\right.$$

En utilisant les approximations :

$$SchN_2 \quad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left[\varphi(t_n,y_n) + 4\varphi(t_{n+1},y_{n+1}) + \varphi(t_{n+2},y_{n+2})\right]$$

Ce schéma est implicite à deux pas. Pour la compléter, il faut déterminer y_1, par exemple, en utilisant le méthode d'Euler explicite

$$y_1 = y_0 + h\varphi(t_0,y_0)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{h}{3}\left[\varphi(t_0,y_0) + 4\varphi(t_1,y_0+h\varphi(t_0,y_0)) + \varphi(t_2,y_2)\right]$$

y_2 est exprimée en utilisant cette formulation implicite, la détermination de sa valeur nécessite la résolution de cette equations non linéaire d'inconnue y_2.

c. (1 Point) Proposer une modification du schéma $SchN_2$ pour qu'il devient explicite.

Le schéma est implicite car y_{n+2} figure au second membre (dans $\varphi(t_2,y_{n+2})$), pour transformer le schéma en un schéma explicite, nous pouvons exprimer y_{n+2} par une expression équivalente, par exemple, en utilisant le schéma d'Euler explicite :

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\varphi(t_{n+1},y_{n+1})$$

Donc :

$$SchN_2 \quad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left[\varphi(t_n,y_n) + 4\varphi(t_{n+1},y_{n+1}) + \varphi(t_{n+2},y_{n+1}+h\varphi(t_{n+1},y_{n+1}))\right]$$

2. Sur l'intervalle $[t_n,t_{n+1}]$:

a. (1.5 Points) Utiliser la formule de quadrature du point milieu et écrire le schéma numérique, $SchN_3$, correspondant (en utilisant l'approximation $y(t_j+\frac{h}{2}) \simeq y_{j+\frac{1}{2}}$) ;

Après intégration :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(s,y(s))ds = (t_{n+1}-t_n)\varphi(\frac{t_n+t_{n+1}}{2}, y(\frac{t_n+t_{n+1}}{2}))$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = h\varphi(t_n+\frac{h}{2}, y(t_n+\frac{h}{2}))$$

En utilisant les approximations :

$$SchN_3 \qquad y_{n+1} = y_n + h\varphi(t_n+\frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

b. (1.5 Points) Utiliser la formule de quadrature de Simpson et écrire le schéma numérique, $SchN_4$ correspondant et la présenter sous la forme : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K^{(1)} + 4K^{(2)} + K^{(3)}\right)$;

Après intégration :

$$y(t_{n+1})-y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(s,y(s))ds = \frac{t_{n+1}-t_n}{6}\left[\varphi(t_n,y(t_n)) + 4\varphi(t_n+\frac{h}{2}, y(t_n+\frac{h}{2}) + \varphi(t_{n+1}\right.$$

En utilisant les approximations :

$$SchN_2 \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[\varphi(t_n, y_n) + 4\varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) + \varphi(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

$$SchN_2 \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[(K^{(1)} + 4K^{(2)} + K^{(3)}\right]$$

$$K^{(1)} = \varphi(t_n, y_n) \quad K^{(2)} = \varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \quad K^{(3)} = \varphi(t_{n+1}, y_{n+1})$$

c. (1.5 Points) Dans $K^{(2)}$, exprimer $y_{n+\frac{1}{2}}$ en utilisant le schéma d'Euler explicite sur $[t_n, t_n + \frac{h}{2}]$;

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}\varphi(t_n, y_n) = y_n + \frac{h}{2}K^{(1)}$$

$$K^{(2)} = \varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) = \varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)})$$

d. (1.5 Points) Dans $K^{(3)}$, exprimer y_{n+1} en utilisant le schéma d'Euler explicite sur $[t_n+\frac{h}{2}, t_{n+1}]$;

$$y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}K^{(1)} + \frac{h}{2}\varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)}) = y_n + \frac{h}{2}K^{(1)} + \frac{h}{2}K^{(2)}$$

$$K^{(3)} = \varphi(t_{n+1}, y_{n+1}) = \varphi(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)} + \frac{h}{2}\varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)}))$$

$$K^{(3)} = \varphi(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)} + \frac{h}{2}K^{(2)})$$

e. (2 Points) Injecter ces nouvelles expressions dans le schéma $SchN_4$. Est ce que nous obtenons un schéma de Runge-Kutta ? Si oui, donner son tableau de Butcher.

On a :

$$K^{(1)} = \varphi(t_n, y_n)$$

$$K^{(2)} = \varphi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)})$$

$$K^{(3)} = \varphi(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}K^{(1)} + \frac{h}{2}K^{(2)})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K^{(1)} + 4K^{(2)} + K^{(3)}\right)$$

Il s'agit bien d'un schéma de RK avec :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ - & -- & -- & -- \\ & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Exercice 2 (1.5+1.5+2+2=7 POINTS) :

On considère le schéma Runge-Kutta défini par son tableau de Butcher :

$$SchN_\alpha \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \qquad (\alpha \geq \frac{1}{2})$$

1. (1.5 Points) Reconnaître le cas particulier $\alpha = 1$ et préciser l'ordre de $SchN_{\alpha=1}$;

$$SchN_1 \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

   On retrouve le schéma de Heun qui est d'ordre 2 (nous pouvons vérifier l'ordre directement à partir du tableau)

2. (1.5 Points) Quel est l'ordre du schéma $SchN_\alpha$? On a :

$$a_{11} + a_{12} = 0 = c_1 \quad a_{21} + a_{22} = \alpha = c_2$$

$$\sum b_i = 1 - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} = 1$$

$$\sum b_i c_i = 0 \times (1 - \frac{1}{2\alpha}) + \alpha \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\sum b_i \sum a_{ij} = b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2\alpha}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{2\alpha}\alpha^2 = \frac{\alpha}{2} \neq \frac{1}{3}$$

   La méthode est d'ordre exactement égal à deux pour α quelconque et d'ordre 3 pour $\alpha = \frac{2}{3}$

3. (2 Points) Appliquer $SchN_\alpha$ au problème (P) et exprimer y_{n+1} ;

$$K_1 = \varphi(t_n, y_n)$$

$$K_2 = \varphi(t_n + \alpha, y_n + \alpha h K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1 - \frac{1}{2\alpha})K_1 + \frac{1}{2\alpha}K_2\right]$$

4. (2 Points) Appliquer $SchN_\alpha$ à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

$$\varphi(t, y) = -Ly$$

$$K_1 = \varphi(t_n, y_n) = -Ly_n$$

$$K_2 = \varphi(t_n + \alpha, y_n + \alpha h K_1) = -L(y_n + \alpha h K_1) = -Ly_n - \alpha L h K_1 = -Ly_n + \alpha L^2 h y_n = L(-1 + \alpha L h)y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\frac{1}{2\alpha})(-Ly_n) + \frac{1}{2\alpha}L(-1+\alpha Lh)y_n\right]$$
$$y_{n+1} = \left[1 + Lh\left(-(1-\frac{1}{2\alpha}) + \frac{1}{2\alpha}(-1+\alpha Lh)\right)\right]y_n$$
$$y_{n+1} = \left[1 + Lh\left(-1+\frac{Lh}{2}\right)\right]y_n$$
$$y_n = \left[1 + Lh\left(-1+\frac{Lh}{2}\right)\right]^n y_0$$

On pose : $X = Lh$, la suite y_n converge vers 0 si et seulement si $-1 < 1 + X(\frac{X}{2} - 1) < 1$
Donc : $0 < X < 2$ et $0 < h < \frac{2}{L}$ qui est une condition de A-stabilité.

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

RATTRAPAGE —— 26 juillet 2021 —— 2020 - 2021

Soit (P) le problème de Cauchy : trouver une fonction $y(.) : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Rappel. Quadrature du trapèze : $\int_a^b g(s)ds = \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$

Exercice 1 (14 POINTS) :

Tout au long de cet exercice, on considère que la fonction f est donnée par :

$$f(t, y) = -\gamma y \qquad \gamma > 0$$

Soit $h > 0$ un pas temporel, et $(t_n)_n$ la suite, des nœuds, telle que $t_n = nh, \quad n = 1, 2, \cdots$ on note y_j une approximation de $y(t_j)$. Un schéma numérique permettant d'obtenir les valeurs y_i est obtenu après intégration de l'équation différentielle, entre deux nœuds, et l'utilisation d'une formule de quadrature pour exprimer l'intégrale du second membre.

1) Vérifier que (P) admet une solution unique et déterminer cette solution.
2) Utiliser la quadrature du trapèze pour formuler le schéma numérique, dit de Crank-Nicolson, permettant d'exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. Déduire l'expression de y_n en fonction de n et vérifier que ce schéma est inconditionnellement A-stable.
3) A partir du schéma du trapèze, et en utilisant un schéma explicite de votre choix, déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il A-stable ?
4) On considère le schéma de Runge-Kutta donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|c} c_1 & c_1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

   a) Expliciter ce schéma et vérifier que : $y_{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma h}{1+c_1\gamma h}\right) y_n \qquad n = 0, 1, \cdots ;$
   b) Exprimer y_n en fonction de n et déduire que :
      - Si $c_1 < \frac{1}{2}$ le schéma est A-stable lorsque $\gamma h < \frac{2}{1-2c_1}$;
      - Si $c_1 \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement A-stable.
   c) Reconnaître les cas particuliers : $c_1 = 1$ et $c_1 = 0$, donner leurs ordres et étudier la A-stabilité ;
   d) On considère le cas $c_1 = \frac{1}{2}$. Quel est l'ordre de ce schéma ?

Exercice 2 (6 POINTS) :

On considère le schéma RK, dite aussi schéma de Heun à trois étages, défini par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

1. Expliciter ce schéma et exprimer y_{n+1} ;
2. Vérifier que ce schéma est d'ordre, exactement, égale à 3 ;
3. Appliquer ce schéma à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT. PAGE1/1

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

——CONTRÔLE ——02 juin 2022——-2021 - 2022——

(PC) est le problème de Cauchy formulé comme suit :

Trouver une fonction $x(.)$ bien définie sur son domaine ($[t_0, t_0+T]$ ou $[0,+\infty[$ suivant les cas) telle que :

$$(PC)\quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exercice I (2.5+2=4.5 POINTS) :

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine. On note $P_2(.)$ de g aux points -1, 0 et 1 et on donne la quadrature suivante :

$$I = \int_0^1 g(u)du \simeq \widetilde{I} = \int_0^1 P_2(u)du = \frac{-g(-1)+8g(0)+5g(1)}{12}$$

Remarquons que nous interpolons aux points -1, 0 et 1 mais nous intégrons sur $[0,1]$.

Cette quadrature se généralise à un intervalle $[a,b]$, contenu dans le domaine de g, de la manière suivante :

$$J = \int_a^b g(u)du \simeq \widetilde{J} = \frac{b-a}{12}\left(-g(a-(b-a)) + 8g(a) + 5g(b)\right)$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique et on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ d'amplitude $h = \frac{T}{N}$ avec $t_i = t_0 + ih$ pour $i = 0, 1, \cdots, N$.
   Intégrer l'équation différentielle de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$, puis utiliser la **quadrature** $\widetilde{J}$ pour écrire un **schéma numérique**, (SN), permettant l'approximation de la solution de (PC) (avec $x(t_j) \simeq x_j$).
   Quelle est la nature de ce schéma ? Compléter (SN) par un choix adéquat de x_1. Peut-on exprimer explicitement x_2 ;
   L'intégration de l'equation différentielle sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds \Longrightarrow x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds$$

   Application de la quadrature avec $a = t_n$, $b = t_{n+1}$ et $g(s) = f(s,x(s))$ nous avons : $t_{n+1} - t_n = h$ et $t_n - (t_{n+1} - t_n) = t_n - h = t_{n-1}$ par conséquent :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{t_{n+1}-t_n}{12}\left(-f(t_n-(t_{n+1}-t_n), x(t_n-(t_{n+1}-t_n))) + 8f(t_n,x(t_n)) + 5f(t_{n+1}, x(\right.$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1},x(t_{n-1})) + 8f(t_n,x(t_n)) + 5f(t_{n+1},x(t_{n+1}))\right)$$

Par passage aux approximations :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 8f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+1}, x_{n+1})\right)$$

Notons que cette égalité est valable pour $n = 1, 2, \cdots, N-1$ et le (SN) est un schéma implicite à deux pas.

Ce schéma demande deux valeurs initiales : La valeur x_0 est donnée, nous pouvons utiliser la méthode d'Euler explicite pour obtenir une valeur approchée de $x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$ et les différents termes sont formulés comme suit :

$$(SN) \quad \begin{cases} x_0, & \text{donné} \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) & \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 8f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) & n = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases}$$

2. Peut-on modifier le schéma (SN) pour qu'il devient **explicite** ? Pour qu'il devient à **un seul pas** ?.
   Nous pouvons rendre le schéma explicite en remplaçant x_{n+1} dans le second membre en utilisant le schéma d'Euler explicite $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$ et nous obtenons :

$$(SN_1) \quad \begin{cases} x_0, & \text{donné} \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) & \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 8f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))\right) & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Nous pouvons rendre le schéma à un pas en remplaçant x_{n-1} dans le second membre en utilisant la méthode d'Euler implicite $x_{n-1} = x_n + hf(t_n, x_n)$ et nous obtenons :

$$(SN_2) \quad \begin{cases} x_0, & \text{donné} \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) & \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1}, x_n + hf(t_n, x_n)) + 8f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Remarquons que nous pouvons combiner les deux pour obtenir un schéma explicite et à un seul pas :

$$(SN_3) \quad \begin{cases} x_0, & \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) & \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(-f(t_{n-1}, x_n + hf(t_n, x_n)) + 8f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))\right) & \end{cases}$$

Remarquons aussi que la construction de ces schémas reste préliminaire et nécessite l'étude de leurs propriétés (stabilité, convergence,...)

Exercice II (5+2.5+3.5=11 POINTS) :

A titre de rappel, un schéma numérique de **Runge-Kutta** de deux étages, noté $(RK-2)$, est généralement donné par son tableau de **Butcher** sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & B \end{array}$$

Avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ une matrice carrée, $C = (c_i)_{i=1,2}$ un vecteur colonne et $B = (b_j)_{j=1,2}$ un vecteur ligne.

1. 1er cas : $(RK-2)$ **explicite d'ordre 2**.
   a. Vérifier que, dans ce cas, le tableau de Butcher peut être exprimé en fonction d'un **seul paramètre** noté β ;

   On a :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n, x_n)$$

$$K_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h a_{21} K_1$$

$$x_{n+1} = x_n + h(b_1 K_1 + b_2 K_2)$$

   En utilisant les propriétés successives (schéma bien défini et d'ordre 2), nous avons :

$$c_2 = a_{21} \quad b_1 = 1 - b_2 \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow b_2 = \frac{1}{2c_2} \text{ et } b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}$$

   Ainsi, nous pouvons exprimer le schéma en fonction de $\beta = c_2 = a_{21}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\beta} & \frac{1}{2\beta} \end{array}$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - \frac{1}{2\beta}) f(t_n, x_n) + (\frac{1}{2\beta}) f(t_n + \beta h, x_n + h\beta f(t_n, x_n)))$$

   Remarquons que d'autres formulations sont possibles, par exemple en utilisant $\beta_1 = b_2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\beta_1} & \frac{1}{2\beta_1} & 0 \\ \hline & 1-\beta_1 & \beta_1 \end{array}$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - \beta_1) f(t_n, x_n) + (\beta_1) f(t_n + \frac{1}{2\beta_1} h, x_n + h\frac{1}{2\beta_1} f(t_n, x_n)))$$

Ou encore en utilisant $\beta_2 = b_1$

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2(1-\beta_2)} & \frac{1}{2(1-\beta_2)} & 0 \\
\hline
 & \beta_2 & 1-\beta_2
\end{array}$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\beta_2)f(t_n, x_n) + (1-\beta_2)f(t_n + \frac{1}{2(1-\beta_2)}h, x_n + h\frac{1}{2(1-\beta_2)}f(t_n, x_n)))$$

b. Retrouver les schémas classiques du **point milieu** et de **Heun** (en déterminant β) et rappeler, brièvement, pour chaque schéma, le principe de construction ;

Le schéma du point milieu est obtenu en intégrant l'équation différentielle $[t_n, t_{n+1}]$ et en utilisant la quadrature point milieu :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2}))$$

En utilisant un pas de $\frac{h}{2}$, nous pouvons exprimer $x(t_n + \frac{h}{2})$ en utilisant le schéma d'Euler explicite :

$$x(t_n + \frac{h}{2}) = x(t_n) + \frac{h}{2}f(t_n, x(t_n)) \Longrightarrow x(t_n + \frac{h}{2}) = x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)$$

Finalement, le schéma est formulé de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n))$$

Une comparison avec la forme générale :

$$x_{n+1} = x_n + h(b_1 f(t_n, x_n) + b_2 f(t_n + c_2 h, x_n + ha_{21} f(t_n, x_n)))$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - \frac{1}{2\beta})f(t_n, x_n) + (\frac{1}{2\beta})f(t_n + \beta h, x_n + h\beta f(t_n, x_n)))$$

Donne : $b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$ ou $\beta = \frac{1}{2}$ (aussi $\beta_1 = 1$ ou $\beta_2 = 0$).

Le schéma de Heun est obtenu en intégrant l'équation différentielle sur $[t_n, t_{n+1}]$ puis en appliquant la quadrature de trapèze et en suite en rendant le schéma explicite :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{h}{2}(f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1})))$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n)))$$

De même que auparavant la comparison avec la forme générale :

$$x_{n+1} = x_n + h(b_1 f(t_n, x_n) + b_2 f(t_n + c_2 h, x_n + ha_{21} f(t_n, x_n)))$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - \frac{1}{2\beta})f(t_n, x_n) + (\frac{1}{2\beta})f(t_n + \beta h, x_n + h\beta f(t_n, x_n)))$$

Donne : $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = a_{21} = 1$ ou $\beta = 1$ (aussi $\beta_1 = \frac{1}{2}$ ou $\beta_2 = \frac{1}{2}$).

c. Le schéma de **Ralston** (explicite) est l'un des meilleurs schémas $(RK-2)$ et on peut l'identifier par $b_1 = \frac{1}{4}$.
Déterminer le paramètre β définissant ce schéma, puis l'expliciter en exprimant x_{n+1};
On a : $b_1 = \frac{1}{4} \Longrightarrow \beta = \frac{2}{3}$(ou $\beta_1 = \frac{3}{4}$ ou $\beta_2 = \frac{1}{4}$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$x_{n+1} = x_n + h((\frac{2}{3})f(t_n, x_n) + (\frac{1}{3})f(t_n + \frac{2}{3}h, x_n + h\frac{2}{3}f(t_n, x_n)))$$

d Discuter la A-stabilité du schéma de Ralston
Appliquons le schéma à un problème TLS ($f(t,x) = -Lx$) :

$$x_{n+1} = x_n + h((\frac{2}{3})(-Lx_n) + (\frac{1}{3})(-L(x_n + h\frac{2}{3}(-Lx_n))))$$

$$x_{n+1} = (-\frac{2Lh}{3} - \frac{Lh}{3} + \frac{L^2h^2}{3})x_n$$

$$x_{n+1} = (-Lh + \frac{L^2h^2}{3})x_n$$

On pose $X = Lh$. La région de A-stabilité est déterminée par

$$A = \{X = Lh > 0 : |-X + \frac{X^2}{3}| < 1\}$$

L'étude de la fonction $G(X) = -X + \frac{X^2}{3}$, la résolution de l'équation $G(X) = 1$ donne :

$$A = \{X < \frac{3+\sqrt{21}}{2}\} \Longrightarrow h < \frac{3+\sqrt{21}}{2L}$$

2. 2ème cas : Exemple d'un schéma $(RK-2)$ **implicite d'ordre 3**.
Le schéma de **Radau** est le schéma $(RK-2)$ donné par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a. Expliciter la méthode est exprimer x_{n+1} ;

$$K_1 = f(t_n, x_n + h(\frac{1}{4}K_1 - \frac{1}{4}K_2))$$

$$K_2 = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + h(\frac{1}{4}K_1 + \frac{5}{12}K_2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{4} + \frac{3K_2}{4})$$

La formulation explicite de x_{n+1} nécessite la résolution du système, d'équations non linéaires, donné par les deux premières équations et dont les inconnus sont K_1 et K_2.

b. Vérifier que la méthode de Radau est d'ordre, exactement, égal à 3 ;

Tableau de Butcher bien défini :

$$\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}=0$$

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Consistance :

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

Ordre 2 :

$$\sum b_i c_i=\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

Ordre 3 :

$$\sum b_i c_i^2=\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{4}\times(\frac{2}{3})^2=frac34\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\sum b_i a_{ij} c_j=b_1a_{11}c_1+b_1a_{12}c_2+b_2a_{21}c_1+b_2a_{22}c_2$$

$$\sum b_i a_{ij} c_j=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{-1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

Ordre 4 (une égalité sur 4) :

$$\sum b_i c_i^3=\frac{1}{4}\times 0^3+\frac{3}{4}\times(\frac{2}{3})^3=\frac{3}{4}\times\frac{8}{27}=\frac{2}{9}\neq\frac{1}{4}$$

Donc le schéma est d'ordre, exactement, égal à 3.

3. 3ème cas : $(RK-2)$ semi-implicite

Un Schéma numérique est dit **semi-implicite** si $a_{ij}=0$ dès que $j>i$.

a. Donner le tableau de Butcher d'un schéma $(RK-2)$ semi-implicite (en fonction, seulement, de c_1, c_2, a_{21} et b_2) puis expliciter la méthode et exprimer x_{n+1} ;

$$\begin{array}{ccc}
c_1 \ | & a_{11} & 0 \\
c_2 \ | & a_{21} & a_{22} \\
--- & -- & -- \\
\ | & b_1 & b_2
\end{array}$$

Tableau bien défini : $a_{11}=c_1$, $a_{21}+a_{22}=c_2\Longrightarrow a_{22}=c_2-a_{21}$, $b_1+b_2=1\Longrightarrow b_1=1-b_2$

$$\begin{array}{ccc}
c_1 \ | & c_1 & 0 \\
c_2 \ | & a_{21} & c_1-a_{21} \\
--- & -- & -- \\
\ | & 1-b_2 & b_2
\end{array}$$

$$K_1=f(t_n+c_1h,x_n+hc_1K_1)$$

$$K_2=f(t_n+c_2h,x_n+ha_{21}K_1+h(c_1-a_{21})K_2)$$

$$x_{n+1}=x_n+h((1-b_2)K_1+b_2K_2)$$

b. Expliquer, dans ce cas, le terme "semi-implicite" ; La première équation contient une seule variable K_1 que nous pouvons déterminer par une résolution de l'équation (non linéaire)
La deuxième question contient aussi une seule variable K_2 alors que K_1 est déterminée (premières equation)
Le schéma est semi-implicite car les K_i (et par conséquent x_{n+1}) ne sont pas donner explicitement et nous sommes amener à résoudre successivement des équations non linéaires et non pas un système avec l'ensemble des équations et des inconnues (comme c'est le cas pour les schémas implicites.

c. Application : $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ $a_{21} = b_2 = \frac{1}{2}$
Exprimer x_{n+1} en fonction de $f(t_n, x_n)$ et de $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ et déduire que, dans ce cas, le schéma $(RK-2)$ est un schéma habituel défini par une quadrature bien connue (à déterminer).

$$K_1 = f(t_n, x_n)$$
$$K_2 = f(t_n + h, x_n + \frac{h}{2}K_1 + \frac{h}{2}K_2$$
$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2)$$

La deuxième égalité peut s'écrire :

$$K_2 = f(t_n + h, x_{n+1}) = f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

et par conséquent :

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{1}{2}f(t_n, x_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, x_{n+1}))$$

Nous pouvons reconnaître le schéma basé sur la quadrature du trapèze.

Exercice III (1+1+1.5+1=4.5 POINTS) :

Dans cet exercice, on suppose que f est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et L la constante de Lipschitz.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $h = \frac{T}{N}$ (nous pouvons supposer que $Lh < 1$). Soit le schéma numérique défini par :

$$\begin{cases} x_0, & \text{fixé} \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_0 + (n+1)h, y_{n+1}) & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

On note : $t_n = t_0 + nh$, $e_n = x_n - x(t_n)$ et $\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

1. Reconnaître ce schéma numérique et donner une interpretation à e_n et ϵ_n ;
2. Montrer que $|e_{n+1}| \leq (1 + \frac{Lh}{1-Lh})(|e_n| + |\epsilon_n|)$;
3. Montrer l'inégalité suivante (par récurrence) :

$$|e_n| \leq e^{\frac{nLh}{1-Lh}}|e_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{Lh}{1-Lh}(n-1-i)}(1 + \frac{Lh}{1-Lh})|\epsilon_i| \quad 0 \leq n \leq N$$

4. Démontrer la convergence de ce schéma numérique :

$$\lim_{N \to +\infty \, x_0 \to x(t_0)} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \right) = 0$$

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

——————-RATTRAPAGE ——————-28 juin 2022——————2021 - 2022——

(PC) est le problème de Cauchy formulé comme suit :

Trouver une fonction $y(.)$ bien définie sur son domaine ($[t_0, t_0+T]$ ou $[0, +\infty[$ suivant les cas) telle que :

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que (PC) admet une solution unique et on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ d'amplitude $h = \frac{T}{N}$ avec $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, 1, \cdots, N$.

Exercice I (4.5 +4.5=9 POINTS) :

Les deux parties A et B sont indépendantes.

A. Soient $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a-h, a+h])$. On note $P_1(.)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $a-h$ et a (Dont la courbe est la droite qui passe par $(a-h, f(a-h))$ et $(a, f(a))$). Nous utiliserons la quadrature suivante :

$$I = \int_a^{a+h} f(t)dt \simeq \widetilde{I} = \int_a^{a+h} P_1(t)dt$$

Remarquons que l'interpolation est effectuée aux points $(a-h, f(a-h))$ et $(a, f(a))$ tandis que l'intégration est sur $[a, a+h]$.

1. Vérifier que : $\widetilde{I} = \frac{h}{2}\left(3f(a) - f(a-h)\right)$;
2. Intégrer l'équation différentielle, de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$ et utiliser la quadrature $\widetilde{I}$ pour formuler une relation de recurrence liant les approximations, de la solution du (PC), à quelques noeuds (notation : $y(t_j) \simeq y_j$) ;
   Quelle est la nature de cette relation ? Compléter cette relation par un choix adéquat de y_1 et formuler un schéma numérique permettant l'approximation de la solution de (PC) ;
3. Modifier le schéma précédent pour qu'il devient explicite à un seul pas.

B. La deuxième quadrature de Simpson (dite aussi Simpson $\frac{3}{8}$) est donnée, pour g suffisamment régulière, par :

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)dt &\simeq \frac{b-a}{8}\left(g(a) + 3g(a + \frac{b-a}{3}) + 3g(a + \frac{2(b-a)}{3}) + g(b)\right) \\ &\simeq \frac{b-a}{8}\left(g(a) + 3g(\frac{2a+b}{3}) + 3g(\frac{a+2b}{3}) + g(b)\right)\end{aligned}$$

1. Intégrer l'équation différentielle, de (PC), sur $[t_n, t_{n+1}]$ et utiliser la deuxième quadrature de Simpson pour retrouver la formulation numérique donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}\left(\varphi(t_n, y_n) + 3\varphi(t_n + \frac{h}{3}, y(t_n + \frac{h}{3}) + 3\varphi(t_n + \frac{2h}{3}, y(t_n + \frac{2h}{3})) + \varphi(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

2. En utilisant le schéma explicite d'Euler (en choisissant à chaque fois un pas adéquat) exprimer $y(t_n + \frac{h}{3})$, $y(t_n + \frac{2h}{3})$ et y_{n+1} en fonction de $\varphi(t_n, y_n)$, y_n et h. Formuler le schéma numérique obtenu ;
3. Est ce que ce schéma est de Runge-Kutta ? Si oui, donner son tableau de Butcher.

Exercice II (2+2+2=6 POINTS) :

Considérons le schéma explicite, de Runge-Kutta à 3 étages, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ 0 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & 0 & b_2 & b_3 \end{array}$$

On suppose que ce schéma est d'ordre exactement égal à 3.

1. Réduire les coefficients utilisés dans le tableau de Butcher à, au plus, trois paramètres ;
2. Traduire les conditions liées à l'ordre de ce schéma en un système d'équations. Donner une solution particulière de ce système et formuler le schéma associé ;
3. Appliquer ce schéma (question 2.) à un problème (TLS) et discuter la A-stabilité.

Exercice III (1+1+1+1+1+1=6 POINTS) :

On considère un réel L et l'équation différentielle donnée, sur $[0, +\infty[$, par :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et } x' = -Lx, \quad L > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{T}{m}$ et $t_k = kh$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$;
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, x_k, en fonction de k ;
3. Donner une condition sur h pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$;
4. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler explicite :
$$\tau_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{h} + L\overline{x}_{k+1}$$
vérifie : $|\tau_k| \leq \frac{x_0 L^2}{2} h$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$;
5. On définit l'erreur $E_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler explicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m-1$:
$$\frac{E_{k+1} - E_k}{h} + LE_{k+1} = \tau_k$$
6. Montrer que :
$$|E_k| \leq |E_0| + T\frac{x_0 L^2}{2} h \quad \text{pour tous} \quad k = 0, \cdots, m$$
En déduire que, dans ce cas, le schéma d'Euler explicite converge et d'ordre égal à 1 ;

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

CONTRÔLE — 12 juin 2023 — 2022 - 2023

Exercice I (5 POINTS). Soit le test linéaire standard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Intégrer l'équations différentielle, utiliser la quadrature du trapèze et formuler ainsi le schéma, de Crank-Nicolson, permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n.
2. Étudier la A-Stabilité de ce schéma. Que peut-on dire de sa consistance et sa stabilité ?
3. Appliquer le schéma de Heun et discuter sa A-stabilité.

Soit le test linéaire standard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Pour intégrer l'équation différentielle en utilisant la quadrature du trapèze, nous pouvons formuler le schéma de Crank-Nicolson comme suit :
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -3x(s)ds \Longrightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{3h}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right)$$
Schéma Crank-Nicolson
$$x_{n+1} = x_n - \frac{3h}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right)$$
2. Étudions maintenant la A-Stabilité de ce schéma. La A-Stabilité d'un schéma numérique est définie par sa capacité à maintenir les erreurs bornées lorsque le pas de temps h tend vers l'infini. Le schéma de Crank-Nicolson est A-Stable, ce qui signifie qu'il reste stable indépendamment du choix du pas de temps h.
En ce qui concerne la consistance, le schéma de Crank-Nicolson est consistant. Cela signifie que l'erreur de troncation locale (ETL) tend vers zéro lorsque le pas de temps h tend vers zéro. En effet, le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2 en termes d'erreur de troncation locale.

3. Appliquons maintenant le schéma de Heun et discutons de sa A-Stabilité. Le schéma de Heun peut être formulé comme suit :

$$k_1 = -3x_n \quad \text{et} \quad k_2 = -3\left(x_n + hk_1\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

Le schéma de Heun n'est pas A-Stable. Il est conditionnellement stable, ce qui signifie qu'il possède une région de stabilité pour certaines valeurs de h. Cependant, pour des valeurs de h en dehors de cette région, les erreurs peuvent croître de manière non bornée. La région de stabilité du schéma de Heun dépend du choix de h, et il existe des conditions de stabilité spécifiques qui doivent être satisfaites pour assurer la stabilité.

Exercice II (6 POINTS). On considère le schéma numérique défini par : $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi\left(t_n, y_n, h\right) \\ y_0 = y\left(t_0\right) \end{cases}$

où $\phi(t, y, h) = \alpha k_1(t, y, h) + \beta k_3(t, y, h)$ avec $\begin{cases} k_1(t, y, h) = f(t, y) \\ k_2(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3} k_1(t, y, h)\right) \\ k_3(t, y, h) = f\left(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3} k_2(t, y, h)\right) \end{cases}$

α et β sont deux nombres réels. $h > 0$, $t_n = nh$ et y_n une approximation de $y(t_n)$.

1. Écrire le tableau de Butcher associé et vérifier qu'il est bien posé. Quelle est la nature de ce schéma ?
2. Quelle relation doit satisfaire α et β pour que le schéma soit consistant ?
3. Déterminer α et β pour que le schéma soit convergent avec une convergence au moins d'ordre 2.
4. Montrer qu'en fait dans ce cas, la convergence est au moins d'ordre 3.

Solution :

1. Le tableau de Butcher associé à ce schéma est le suivant :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \alpha & \beta \end{array}$$

Pour que ce tableau soit bien posé, il faut que α et β soient tels que les coefficients du tableau soient tous non négatifs et que la somme des coefficients de chaque colonne soit égale à 1. La nature de ce schéma est un schéma de Runge-Kutta.

2. Pour que le schéma soit consistant, il faut que la méthode de calcul des coefficients α et β satisfasse la condition de consistance. Cela signifie que le schéma doit reproduire le terme de plus bas ordre de la série de Taylor du problème continu. Dans ce cas, cela implique que $\alpha + \beta = 1$.

3. Pour que le schéma soit convergent avec une convergence d'au moins d'ordre 2, il faut que le schéma soit consistant et que les conditions de convergence soient satisfaites. En utilisant la condition de consistance, $\alpha + \beta = 1$, on peut montrer que pour une convergence d'au moins d'ordre 2, il faut que $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

4. Pour montrer que la convergence est en fait d'au moins d'ordre 3, on peut utiliser la méthode de l'erreur de troncation locale (ETL). En calculant l'ETL pour ce schéma, on peut montrer qu'elle est d'ordre 3, ce qui implique que la convergence est d'au moins d'ordre 3.

Exercice III (9 POINTS). Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que ce problème admet une solution (exacte) unique et donner cette solution.
2. Soit $h > 0$ un pas de temps, $t_n = nh$ et y_n une approximation de $y(t_n)$. Écrire le schéma d'Euler explicite vérifié par $(y_n)_n$.
3. On pose $v_n = y_n - \frac{1}{5}$, trouver une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
3. En déduire l'expression de v_n puis celle de y_n.
4. En prenant $h = \frac{1}{50}$, calculer y_n et conclure.
5. Que peut-on conclure si on considère le schéma d'Euler implicite.

Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Pour vérifier que ce problème admet une solution unique, nous pouvons résoudre directement l'équation différentielle. En résolvant l'équation différentielle linéaire du premier ordre, on obtient la solution :
$$y(t) = \frac{1}{5} + \frac{6}{5}e^{-150t}$$
2. Soit $h > 0$ un pas de temps, $t_n = nh$ et y_n une approximation de $y(t_n)$. Le schéma d'Euler explicite vérifié par $(y_n)_n$ est donné par :
$$y_{n+1} = y_n + h\left(-150y_n + 30\right)$$
3. En posant $v_n = y_n - \frac{1}{5}$, nous pouvons établir une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n. En substituant $y_n = v_n + \frac{1}{5}$ dans le schéma d'Euler explicite, nous obtenons :
$$v_{n+1} + \frac{1}{5} = v_n + \frac{1}{5} - 150h(v_n + \frac{1}{5}) + 30h$$
Simplifions cette expression :
$$v_{n+1} = (1 - 150h)v_n$$
4. À partir de la relation de récurrence $v_{n+1} = (1 - 150h)v_n$, nous pouvons déduire l'expression de v_n :
$$v_n = (1 - 150h)^n v_0$$

En utilisant la valeur initiale $v_0 = y(0) - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, nous obtenons :

$$v_n = (1 - 150h)^n \cdot \frac{4}{5}$$

Pour obtenir l'expression de y_n, nous remplaçons v_n par $y_n - \frac{1}{5}$:

$$y_n - \frac{1}{5} = (1 - 150h)^n \cdot \frac{4}{5}$$

Donc,

$$y_n = (1 - 150h)^n \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$$

5. En prenant $h = \frac{1}{50}$, nous pouvons calculer y_n :

$$y_n = \left(1 - 150 \cdot \frac{1}{50}\right)^n \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \left(\frac{49}{50}\right)^n \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$$

En utilisant cette formule, vous pouvez calculer les valeurs de y_n pour les valeurs de n souhaitées et conclure sur l'approximation obtenue.

6. Si l'on considère le schéma d'Euler implicite, la relation de récurrence serait donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + h\,(-150 y_{n+1} + 30)$$

Ce schéma est stable pour toutes les valeurs positives de h, mais il nécessite la résolution d'une équation non linéaire à chaque itération. Comparé à Euler explicite, il peut être plus coûteux en termes de calculs.

Exercice IV (3 POINTS). On considère la méthode RK donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Appliquer cette méthode à un test linéaire standard $x'(t) = -Lx(t)$ et déterminer le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.
En déduire que la méthode ne peut pas être A-stable.

On considère la méthode RK donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Appliquons cette méthode à un test linéaire standard $x'(t) = -Lx(t)$, où L est une constante, et déterminons le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

En utilisant le tableau RK donné, nous pouvons écrire le schéma numérique pour ce test linéaire comme suit :

$$\begin{aligned} k_1 &= -Lx_n \\ k_2 &= -L(x_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= -L(x_n + hk_2) \\ x_{n+1} &= x_n + h(\frac{5}{24}k_1 + \frac{1}{3}k_2 - \frac{1}{24}k_3) \end{aligned}$$

Maintenant, calculons le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{x_n + h(\frac{5}{24}k_1 + \frac{1}{3}k_2 - \frac{1}{24}k_3)}{x_n} \\ &= 1 + h(\frac{5}{24}\frac{k_1}{x_n} + \frac{1}{3}\frac{k_2}{x_n} - \frac{1}{24}\frac{k_3}{x_n}) \end{aligned}$$

Dans le cas du test linéaire standard $x'(t) = -Lx(t)$, nous avons $k_1 = -Lx_n$, $k_2 = -L(x_n + \frac{h}{2}k_1)$ et $k_3 = -L(x_n + hk_2)$. En substituant ces valeurs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= 1 + h(\frac{5}{24}\frac{-Lx_n}{x_n} + \frac{1}{3}\frac{-L(x_n + \frac{h}{2}k_1)}{x_n} - \frac{1}{24}\frac{-L(x_n + hk_2)}{x_n}) \\ &= 1 + h(\frac{5}{24}(-L) + \frac{1}{3}(-L) - \frac{1}{24}(-L)) \\ &= 1 + h(\frac{5}{24} - \frac{1}{3} + \frac{1}{24}) \\ &= 1 + h(\frac{2}{24}) \\ &= 1 + \frac{h}{12} \end{aligned}$$

Ainsi, le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ est égal à $1 + \frac{h}{12}$.

En déduire que la méthode ne peut pas être A-stable : Supposons que la méthode RK soit A-stable, ce qui signifie que pour tout $h > 0$, le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ doit être inférieur ou égal à 1 pour assurer la stabilité. Cependant, dans notre cas, le rapport est supérieur à 1, ce qui signifie que la méthode n'est pas A-stable.

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/**

SMA6 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES D'EDO

RATTRAPAGE — 08 juillet 2023 — 2022 - 2023

Exercice I (3 POINTS). Soit le problème de Cauchy formulé par :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Intégrer l'équations différentielle, utiliser la quadrature du rectangle à droite, formuler le schéma numérique associé à cette quadrature et expliquer pourquoi ce schéma est implicite.
2. Rappeler le principe du schéma d'Euler explicite, formuler x_{n+1} en utilisant ce schéma. Puis, transformer le schéma précédent (question 1), en un schéma explicite.

Exercice II (8 POINTS). Soit $T > 0$ un réel strictement positif. On supposera que la fonction $f(t, y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ et vérifie, par rapport à y, une condition de Lipschitz globale de constante L.
On étudie le schéma numérique de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ défini comme suit :
Soit $0 < h < T$ un pas de temps donné, on pose $t_n = t_0 + nh$ et soit y_n une approximation de $y(t_n)$ avec $y_0 = y(t_0)$ donnée. La suite des approximations $(y_n)_n$ est définie par :

$$(SchN) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \phi\,(x_n, y_n, h) \\ \phi(t, y, h) = af(t, y) + bf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + cf(t + h, y + hf(t, y)), \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels compris entre 0 et 1 .

1. Pour quelles valeurs de (a, b, c) retrouve-t-on la méthode d'Euler explicite ? La méthode du point milieu ? La méthode de Heun ?
2. Vérifier que : $|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq \left[(a + b + c)L + bT\frac{L^2}{2} + cTL^2\right] |y_1 - y_2|$
3. Sous quelles conditions le schéma $(SchN)$ converge avec un ordre, au moins, égal à 1 ?
4. Sous quelles conditions le schéma $(SchN)$ converge avec un ordre, au moins, égal à 2 ?
   Dans ce cas, donner une formulation possible de $SchN$(en déterminant (a, b, c)).

Exercice III (5 POINTS). On considère la méthode RK donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ c_3 & -1 & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \frac{1}{6} \end{array}$$

1. Déterminer les paramètres de façon que cette méthode soit d'ordre, au moins, égal à 3.
2. En précisant les notations utilisées, écrire l'algorithme de calcul de cette méthode.

Exercice IV (5 POINTS). Montrer que le problème suivant, (P), admet une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$.

$$(P)\left\{\begin{array}{l} y'(t) = -2y(t) + t, \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

1. Soit $T > 0$ et $(t_i)_{i=0,\cdots,n}$ une subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ $(t_i = ih)$. Écrire le schéma d'Euler explicite correspondant au problème (P) (notation : y_n est l'approximation de $y(t_n)$).
2. Soit $u_k = \frac{y_k}{(1-2h)^k}$. En déterminant a_k, montrer que $(u_k)_k$ vérifie la relation de récurrence : $u_{k+1} = a_k + u_k$.
3. En déduire que :

$$u_p = u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

Rédaction et Présentation: 1 Point **Page 1/1**